ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
CENTRAL ECONOMICS AND MATHEMATIC INSTITUTE

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

А.Н. Козырев

Модель общего равновесия с эндогенным технологическим прогрессом и двухэтапным ценообразованием

Препринт # WP/2002/133

МОСКВА
2002

Козырев А.Н., Модель общего равновесия с эндогенным технологическим прогрессом и двухэтапным ценообразованием

/ Препринт # WP/2002/001. М.: ЦЭМИ РАН, 2002. 58с. (Рус)

Построена математическая модель общего равновесия с эндогенным технологическим прогрессом и двухэтапным ценообразованием. Благодаря двухэтапной системе цен в модели совмещены окупаемость производственных затрат и ценообразование на основе предельных издержек в условиях возрастающей отдачи на масштаб производства. Доказаны теоремы существования равновесия, а также первая и вторая теоремы эффективности.

Препринт рассчитан на специалистов в области математической экономики.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-06-80152а).

Kozyrev A.N., General Equilibrium Model with Endogenous Technology Progress and Two-part Tariffs. / Working Paper # WP/2002/001. — Moscow, CEMI, Russian Academy of Sciences, 2002. 58p. (Rus.)

The mathematical model of the general equilibrium with endogenous technological progress and two-part tariffs is constructed. The recoupment of industrial expenses and marginal pricing are combined in conditions of increasing return to scale are achieved thanking two level system of the prices in the model. Theorems of existence of equilibrium and also the first and second theorems of efficiency are proved.

The paper is intended for researchers in Mathematical Economics.

This work was supported by Russian Foundation of Fundamental Research (project № 01-06-80152a)

Ответственный редактор —

Оглавление

1. Модель

1.1. Базовые принципы и обозначения

Рассматриваемая ниже модель экономического равновесия с эндогенным техническим прогрессом и двухэтапным ценообразованием – это естественное обобщение простейшей модели того же типа [1] на случай, когда количество экономических агентов, показателей, характеризующих интеллектуальный капитал (ИК), и наименований производимых и потребляемых продуктов – любые натуральные числа, т.е. количество переменных модели не ограничено (как в [1]) только необходимым минимумом.

В частности не ограничено число переменных, используемых для описания ИК. Последнее обстоятельство важно не только в теоретическом, но и в практическом отношении, поскольку на практике для представления ИК обычно используется несколько отдельных параметров. Отчеты фирм об ИК, используемые для привлечения инвестиций или принятия управленческих решений, обычно содержат до десяти и более различных показателей, разбитых на три (или более) группы, соответствующие основным компонентам ИК. В том числе обычно выделяется несколько показателей, характеризующих технологический уровень фирмы. Эти показатели достаточно разнородны и, вообще говоря, могут входить в различные группы. Например, в фирме «Скандия» [2] принято различать человеческий и структурный капитал. Структурный капитал, в свою очередь, делится на клиентский и организационный капитал. В состав организационного капитала входит инновационный капитал, включая интеллектуальную собственность, а также ноу-хау. Вместе с тем, ноу-хау фирмы относятся и к человеческому капиталу. Точнее, к человеческому капиталу относится та часть ноу-хау, которую составляют неотчуждаемые или, как их еще называют, подразумеваемые знания. Таким образом, показатели, характеризующие технологический уровень фирмы, могут относиться к разным группам. Сводить их к одной скалярной переменной не всегда корректно. Тем более нельзя сводить эти показатели к одной переменной, если принять в расчет низкую ликвидность основных компонентов ИК и сложность их приобретения на свободном рынке.

К числу компонентов ИК, которые могут быть проданы или переданы на основе лицензии, относятся исключительные права (интеллектуальная собственность) и систематизированные знания. Однако, это достаточно специфические объекты рыночного оборота. В отличие от операций с материальными продуктами, операции со знаниями (информацией) подчиняются скорее булевским, чем арифметическим правилам. Поэтому производство знаний в экономике, функционирующей оптимальным образом, должно быть организовано несколько иначе, чем производство обычных товаров. А именно, в такой экономике не может быть двух или более фирм, производящих один и тот же продукт. На практике это правило не всегда выполняется в силу значительных издержек поиска информации. Однако по мере развития информационных технологий такие издержки сокращаются. Соответственно, все чаще оказывается, что там, где возможно сравнение, востребованными рынком оказываются только абсолютно лучшие образцы [3]. Иначе говоря, указанное правило работает все более четко.

В рассматриваемой модели, как и в подавляющем большинстве моделей равновесного типа, издержки поиска информации вообще отсутствуют. Поэтому с каждой из переменных, характеризующих ИК, может быть связана только одна фирма, производящая соответствующий интеллектуальный продукт. Конкуренция между такими фирмами либо отсутствует, либо проявляется совсем не в таких формах, как конкуренция между производителями обычных продуктов.

Покупка на открытом рынке материальных ресурсов (в отличие от компонентов ИК), как правило, не вызывает проблем. Более того, в последние годы отчетливо прослеживается тенденция декапитализации наиболее успешных фирм [4] с передачей большей части производственных функций, учета и других рутинных операций фирмам, специализирующимся на выполнении именно этих функций или операций. Вместе с тем, многие функции, считавшиеся раньше производственными и выполнявшиеся фирмами, переходят к клиентам этих фирм (потребителям) [5]. Иными словами, границы фирмы теряют былую четкость. Данное обстоятельство учитывается в модели при представлении производственного сектора. А именно, в ней нет экономических агентов, именуемых производственными фирмами. Есть фирма (или совокупность фирм), которая производит все представленные в модели компоненты ИК, но может производить также и потребительские продукты, и есть конечное число потребителей, каждый из которых может стать также производителем потребляемых продуктов для себя. Число наименований таких продуктов – любое конечное число.

Существенное увеличение числа переменных модели в сравнении с [1] потребовало изменить систему обозначений и способ нормировки вектора цен на потребляемые продукты. Кроме того, определенные изменения в системе обозначений пришлось ввести в связи с использованием выпуклого анализа и обобщенного дифференцирования.

Далее без специальных оговорок и разъяснения экономического смысла используются следующие стандартные обозначения:

$\mathbb{R}^l_+$ – неотрицательный ортант арифметического пространства $\mathbb{R}^l$;

$R_+ = \mathbb{R}^1_+$ – множество неотрицательных чисел;

sx – произведение вектора x на скаляр s;

$x \cdot y$ – скалярное произведение векторов x и y;

$p \cdot B$ – произведение вектор-строки p на матрицу B;

Bx – произведение вектор-столбца x на матрицу B;

clX – замыкание множества X;

$intX$ – внутренность множества X;

coX – выпуклая оболочка множества X;

$con\{y_i\}_{i=1}^m$ — конус с направляющими $y_i, i = \overline{1,m}$;

S – стандартный симплекс в $\mathbb{R}^l$;

S^{l-1} – единичная сфера в $\mathbb{R}^l$;

$D^k u(x)$ – производная порядка k отображения u в точке x;

$D_t f(x, t^\star)$ – производная по t функции $f(x,t)$ в точке $t^\star \in T$;

$\partial_t f(x, t^*)$ – субдифференциал выпуклой функции $f(x,t)$ как функции от t в точке t^*;

$\Gamma(x)$ – конус возможных направлений в точке $x \in X \subset \mathbb{R}^l$;

$\Gamma^+(x)$ – сопряженный конус к $\Gamma(x)$;

$\Gamma^{++}(x)$ – второй сопряженный к $\Gamma(x)$ конус, т.е. сопряженный к $\Gamma^+(x)$;

$|N|$ – число элементов конечного множества N;

$M = \{1, ..., m\}$ – множество экономических агентов (потребителей);

$L = \{1, ..., l\}$ – множество наименований продуктов;

$i \in M$ – произвольный экономический агент.

Остальные используемые обозначения вводятся в тексте по мере необходимости и сопровождаются необходимыми пояснениями.

1.2. Формальное описание модели

Формальное описание модели в виде системы функциональных уравнений состоит из трех блоков, именуемых равновесием в потреблении, производственным равновесием и связующим блоком, который включает материальный и финансовый балансы. Соответственно, описание экономики состоит из сектора потребления, включающего m потребителей, производственного сектора, представленного в агрегированном виде без разделения его на отдельные фирмы, а также функции распределения доходов, получаемых в виде прибыли производственного сектора и выручки от продажи начальных запасов. Каждый из трех названных блоков может быть описан в терминах отображений, определенных на различных подмножествах пространства переменных модели.

Как и в большинстве моделей равновесия допустимым набором продуктов считается неотрицательный l-мерный вектор. Множество допустимых потребительских наборов для каждого потребителя либо совпадает с $\mathbb{R}^l_+$, либо содержится в нем. С точки зрения производства все продукты подразделяются на воспроизводимые и невоспроизводимые, т.е. ресурсы. Иными словами, множество всех наименований продуктов $L = \{1, \ldots, l\}$ может быть представлено в виде $L = \hat{L} \cup \check{L}$, где $\hat{l} = |\hat{L}|$, $\check{l} = |\check{L}|$ – число наименований воспроизводимых и невоспроизводимых продуктов, соответственно, причем $\hat{l} + \check{l} = l$. Соответствующие подпространства в $\mathbb{R}^l \equiv \mathbb{R}^L$ определяются и обозначаются далее как

$$\mathbb{R}^{\hat{L}} \equiv \mathbb{R}^l(\hat{L}) \equiv \{\xi \in \mathbb{R}^l | \xi_k = 0, \forall k \notin \hat{L}\}$$

и

$$\mathbb{R}^{\check{L}} \equiv \mathbb{R}^l(\check{L}) \equiv \{\xi \in \mathbb{R}^l | \xi_k = 0, \forall k \notin \check{L}\}.$$

Пространство линейных операторов, действующих из $\mathbb{R}^L$ в $\mathbb{R}^L$ и оставляющих на месте векторы из $\mathbb{R}^{\check{L}}$, обозначается через $\mathbb{B}^{\check{L}}$. Начальные запасы продуктов в экономике представлены вектором

$$\omega \in \mathbb{R}^{\check{L}}_+ \subset \mathbb{R}^L \equiv \mathbb{R}^l_+.$$

В частности это означает, что изначально в экономике имеются только невоспроизводимые продукты.

Для описания технологического уровня используется n переменных или, что эквивалентно, вектор $t \in T \subset I\!R^n$. При этом совсем не обязательно трактовать t в терминах количества. Гораздо естественнее рассматривать T как частично упорядоченное множество, погруженное в $I\!R^n$. Такая трактовка очень удобна технически и вполне объяснима в терминах затрат на исследования и снижения ресурсоемкости технологий [6].

Каждому значению $t \in T$ соответствуют вектор $A(T) \in I\!R_+^{\check{L}}$ и $l \times l$-матрица $B(t) \in I\!B^{\check{L}}$. Компоненты $A(t)$ следует понимать как затраты ресурсов на достижение заданного технологического уровня t (затраты на НИР и ОКР), а элементы матрицы $B(t)$ – как коэффициенты текущих производственных затрат ресурсов при заданном уровне t. При этом естественно ожидать, что компоненты $A(t)$ монотонно возрастают, а коэффициенты $B(t)$ монотонно убывают по t.

В частности, если в экономике есть только один невоспроизводимый продукт, то можно параметризовать уровни технологического развития по затратам этого продукта. При такой параметризации вектор $A(t)$ имеет только один ненулевой элемент, равный t. Если производимый продукт также только один, т.е. $l = 2, \quad \hat{l} = \check{l} = 1$, то матрица текущих затрат представима в виде

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b(t) & 1 \end{pmatrix}.$$

Первая строка этой матрицы состоит из нулей, так как затраты первого (производимого) продукта при производстве любого продукта равны нулю. Невоспроизводимый продукт формально можно считать производимым из него самого по тривиальной технологии, поэтому в нижнем правом углу матрицы стоит единица. Наконец, производство единственного производимого продукта требует затрат $b(t)$ единиц невоспроизводимого.

Кроме того, если $l = 2, \quad \hat{l} = \check{l} = 1$, то возможна параметризация по эффективности использования ресурса. Это означает, что $b(t) = 1/t$.

В общем случае таких простых параметризаций нет, но предположение о том, что T погружено в $I\!R^n$ вполне допустимо, а матрица $B(t)$ всегда может быть представлена примерно в таком виде, как показано выше. Ее первые $\hat{l}$ строк состоят из одних нулей, а в нижнем правом углу расположена единичная матрица размерности $\check{l} \times \check{l}$.

Производственные возможности системы в целом можно описать с помощью технологического множества

$$XY = \bigcup_{t \in T} Y(t),$$

где

$$Y(t) = \{x - y \in I\!R^l | x \geq \mathbf{0}, y \geq \mathbf{0}, B(t)x + A(t) \leq y\} \quad t \in T,$$

или отображения

$$Y : T \to 2^{I\!R^l},$$

сопоставляющего каждому $t \in T$ множество $Y(t)$.

Для описания системы цен в модели с m потребителями необходимы $l + mn + n$ переменных, среди которых $l + mn - 1$ переменных формально независимы. При двухэтапном ценообразовании потребитель платит не только за приобретаемые продукты, но и за вход на рынок, т.е. за право покупать продукты по текущим рыночным ценам. Такой порядок расчетов и цен известен в теории игр как двойной тариф [7], а в теории прав собственности – как поэлементное ценообразование [8]. В рассматриваемой модели он конкретизирован для случая, когда требуется совместить строгое следование принципам маржинализма при назначении текущих цен на производимые продукты с возмещением через цены затрат на НИР и ОКР.

Цены производимых продуктов исчисляются на основе предельных затрат, которые определяются матрицей $B(t)$ и ценами на ресурсы. Иначе говоря, при заданном t цены $p \in S$ должны удовлетворять равенству

$$p \cdot B(t) = p$$

или, что то же самое,

$$p \cdot B(t)\xi = p \cdot \xi \quad \forall \xi \in I\!R^l.$$

Фактически это равенство определяет цены воспроизводимых продуктов по ценам на ресурсы. В этой связи бывает удобно считать, что заданы цены только на ресурсы. Чтобы записать это формально, можно воспользоваться понятием класса эквивалентности. При заданном $p \in S$ класс эквивалентности

$$[p] = \{p' \in S | p - p' \in I\!R^{\hat{L}}\}$$

составляют все векторы цен $p' \in S$, которые могут отличаться от p только ценами на воспроизводимые продукты. Совокупность всех таких классов эквивалентности для разных p составляет фактормножество $S/\mathbb{R}^{\hat{L}}$.

Цена входа на рынок персональна для каждого потребителя и зависит от t. Для произвольного потребителя $i \in M$ она исчисляется по формуле $q_i \cdot t$, где q_i – неотрицательный n-мерный вектор. Далее для краткости вместо $(q_1, \ldots, q_m)$ используется обозначение $\mathbf{q}$. Аналогичным образом для ml-мерного вектора $(p, \ldots, p) \in (\mathbb{R}^l)^m$ используется обозначение $\mathbf{p}$.

Потребительский сектор экономики включает m потребителей с номерами $i \in M$ и предпочтениями, заданными для каждого i на множестве $\mathbb{R}^l_+ \times T$ или на его подмножестве $X_i \times T_i$. Потребление произвольного агента i описывает l-мерный вектор x_i из множества X_i, состоящего из всех допустимых для данного i наборов потребления. Предполагается, что предпочтения на $X_i \times T_i$ индуцированы предпочтениями на X_i, т.е. непосредственно от $t_i \in T_i$ не зависят. Однако цена пары (x_i, t_i) при двухэтапном ценообразовании зависит от t_i, поскольку от t_i зависят цены производимых продуктов и входа на рынок. Выбор x_i оказывается связан с выбором t_i через цены и бюджетное ограничение.

Предпочтения потребителя i на X_i описываются точечно-множественным отображением U_i, сопоставляющим каждому набору x_i из множества X_i некоторое его непустое подмножество $U_i(x_i)$. Считается, что все элементы множества $U_i(x_i)$ более предпочтительны, а элементы его замыкания $clU_i(x_i)$ не менее предпочтительны, чем x_i для потребителя i. Через clU_i обозначается отображение, сопоставляющее точке x_i множество $clU_i(x_i)$.

В частности предпочтения могут быть заданы с помощью отображений обратного спроса [14]. В этом случае предпочтения произвольного потребителя i определяются вектор-функцией

$$g_i : \mathbb{R}^l_+ \to S,$$

сопоставляющей произвольному продуктовому набору $\tilde{x}_i$ такой вектор цен $\tilde{p} = g_i(\tilde{x}_i)$, при котором этот набор будет наиболее предпочтительным для данного потребителя. Множество потребительских наборов, более предпочтительных для данного потребителя, чем набор $\tilde{x}_i$ определяется как

$$U_i(\tilde{x}_i) = \{x_i \in \mathbb{R}^l_+ | g_i(\tilde{x}_i) \cdot x_i > g_i(\tilde{x}_i) \cdot \tilde{x}_i\}.$$

Может использоваться и более общая конструкция, когда

$$U_i(\tilde{x}_i) = \{x_i \in I\!R^l_+ | g_i(\tilde{x}_i) \cdot x_i > g_i(\tilde{x}_i) \cdot \tilde{x}_i + (x_i + \tilde{x}_i) \cdot H_i(x_i - \tilde{x}_i)\} + I\!R^l_+,$$

где H_i – симметричная неотрицательно определенная $l \times l$-матрица. Множество всех таких матриц составляет замкнутый конус в пространстве симметричных $l \times l$-матриц, обозначаемом далее $L^{l \times l}_{sim}$. В том числе матрица H_i может состоять из одних нулей. Тогда предпочтения заданы с помощью функций обратного спроса. Если матрица H_i состоит не из одних нулей, можно считать, что потребитель i оценивает любой потребительский набор x_i с поправкой на необходимось адаптации к нему, причем поправка на адаптацию тем больше, чем больше разница между $\tilde{x}_i$ и x_i. Можно предложить и другие достаточно реалистичные объяснения.

Определение 1. *Равновесием потребителя i при заданных ценах $\bar{q}_i \in R^n_+$, $[\bar{p}] \in S/I\!R^{\hat{L}}$ и доходе $\bar{r}_i \in R$ называется пара*

$$(\bar{x}_i, \bar{t}_i) \in X_i \times T_i,$$

удовлетворяющая условиям:

$$\textbf{(i)} \quad U_i(\bar{x}_i) \bigcap \{x_i \in X_i | \bar{p} \cdot B(\bar{t}_i) x_i + \bar{q}_i \cdot \bar{t}_i \le \bar{r}_i\} = \emptyset$$

$$\textbf{(ii)} \quad \bar{t}_i \in Arg \min_{t \in V(T_i)} [\bar{p} \cdot B(t) \bar{x}_i + \bar{q}_i \cdot t].$$

Замечание 1. В данном определении существенно, что

$$B(\bar{t}_i)\bar{x}_i \in I\!R^{\check{L}}_+ \quad \forall \bar{t}_i, \bar{x}_i.$$

Иначе говоря, компоненты вектора $B(\bar{t}_i)\bar{x}_i$, соответствующие воспроизводимым продуктам, всегда равны нулю. Следовательно, заданные внешним образом цены этих продуктов не влияют на выбор $\bar{x}_i$ и $\bar{t}_i$. Это дает основание говорить, что заданы цены не всех продуктов, а только цены ресурсов, т.е. невоспроизводимых продуктов. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство использована запись $[\bar{p}] \in S/I\!R^{\hat{L}}$, а не $\bar{p} \in S$.

Замечание 2. Потребитель оптимизирует свое состояние по переменным x_i и t_i раздельно. Он выбирает набор продуктов, считая фиксированными не только цены на ресурсы, но и технологию. Тем самым фиксированными оказываются цены на все продукты Выбирая технологию, он также считает заданными цены на ресурсы и, кроме того, считает заданным потребляемый набор продуктов.

Как показывает анализ примеров из практики, такое предположение (о раздельной оптимизации по разным переменным) достаточно реалистично. При этом равновесий потребителя в смысле определения 1 больше, вообще говоря, чем «сильных» равновесий потребителя, когда предполагается оптимизация потребительского выбора сразу по x_i и по t_i.

Замечание 3. Если $\bar{t}_i = \bar{t}$ и цены назначаются на уровне предельных издержек, т.е.

$$\bar{p} = \bar{p} \cdot B(\bar{t}),$$

то условие (**i**) эквивалентно условию

$$(\mathbf{i}') \quad U_i(\bar{x}_i) \bigcap \{x_i \in X_i | \bar{p} \cdot x_i + \bar{q}_i \cdot \bar{t}_i \leq \bar{r}_i\} = \emptyset.$$

Поэтому можно определить равновесие потребителя, заменив условие (**i**) условием (**i′**). Оно называется равновесием потребителя при ценах $\bar{p}$ и $\bar{q}_i$.

Сумма платежей за вход на рынок от всех потребителей при едином для всех потребителей t исчисляется по формуле

$$q \cdot t = \sum_{i=1}^{m} q_i \cdot t.$$

Вектор $q \equiv \sum_{i=1}^{m} q_i$ нет смысла рассматривать как набор самостоятельных переменных, так как при заданном $\mathbf{q}$ он однозначно вычисляется. Однако использование таких вспомогательных переменных имеет смысл для сокращения записи некоторых конструкций. При этом надо четко различать n-мерный вектор q и mn-мерный вектор $\mathbf{q}$.

Следуя тому же принципу, для обозначения потребления в целом можно использовать набор

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$$

из m векторов или $l \times m$ вещественных переменных, а через x обозначить суммарное потребление, т.е.

$$x = x_1 + ... + x_m$$

(по определению). Аналогичным образом

$$X = X_1 + ... + X_m.$$

Через $\mathbf{t}$ обозначается набор векторов

$$\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_m).$$

Кроме того, можно положить по определению

$$\bigvee_{i=1}^{m} t_i = t.$$

В отличие от определения суммарного потребления обычных продуктов x роль операции сложения здесь играет операция максимума. Естественно также предположить, что имеет место равенство

$$\bigcup_{i=1}^{m} T_i = T.$$

Здесь уместно сравнение с определением множества X, которое получается путем сложения индивидуальных потребительских множеств. Замена операции сложения операцией объединения множеств показывает принципиальное отличие переменных, описывающих технологический уровень, от описания обычных продуктов.

Определение 2. *Производственным равновесием называется тройка*

$$(\bar{p}, \bar{q}, \bar{t}) \in S \times I\!R^n \times T,$$

удовлетворяющая условиям:

$$\textbf{(iii)} \quad \bar{t} \in Arg \max_{t \in T} [\bar{q} \cdot t - \bar{p} \cdot A(t)];$$

$$\textbf{(iv)} \quad \bar{p} \cdot B(\bar{t}) = \bar{p}.$$

В этом определении формализована идея максимизации прибыли производственного сектора при заданных $\bar{p} \in S$ и $\bar{q} \in I\!R^n$. Условие (**iii**) означает максимизацию прибыли от продажи прав на покупку продуктов по ценам предельных издержек производства. Прибыль от производства продуктов

$$\bar{p} \cdot x - \bar{p} \cdot B(\bar{t})x,$$

если они производятся по единой технологии и продаются по ценам предельных издержек, тождественно равна нулю в силу условия (**iv**). Прибыль от продажи прав входа на рынок может быть ненулевой.

Чтобы наглядно продемонстрировать смысл условия (**iv**), надо вернуться к примеру с $\check{l} = \hat{l} = 1$. Умножая скалярно вектор-строку $p = (b(t), 1)$ на первый столбец матрицы

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b(t) & 1 \end{pmatrix},$$

получим $b(t)$, а умножая тот же вектор на второй столбец, получим 1. Иначе говоря, вектор $(b(t), 1)$ остается на месте. Следовательно, условие (**iv**) означает, что вектор p пропорционален $(b(t), 1)$.

Связующий блок экономики состоит из вектора начальных запасов $\omega \in I\!R^{\check{L}}$ и отображения распределения прибыли

$$r : S \times I\!R^n \times I\!R^l_+ \times T \to I\!R^m,$$

сопоставляющего четверке (p, q, ω, t) вектор

$$r(p, q, \omega, t) = (r_1(p, q, \omega, t), \ldots, r_m(p, q, \omega, t)) \in I\!R^m,$$

где $r_i(p, q, \omega, t)$ – бюджет потребителя i. Отображение r должно удовлетворять условию

$$\sum_{i=1}^{m} r_i(p, q, \omega, t) = q \cdot t - p \cdot A(t) + p \cdot \omega,$$

называемому иногда законом Вальраса [10]. Иначе говоря, распределению между потребителями подлежит в точности та сумма, которая может быть выручена от реализации прав входа на рынок, где действуют цены на основе предельных издержек, и от реализации ресурсов по текущим ценам. Производство и реализация продуктов по ценам предельных издержек, как уже говорилось выше, всегда дает нулевую прибыль, которую здесь можно не учитывать. Зависимость бюджетов потребителей от начального запаса ресурсов в экономике следует учитывать только при построении пространства экономик. В остальных случаях можно считать

$$r_i(p, q, \omega, t) \equiv R_i(p, q, t), \quad \forall i \in M.$$

Состояние экономики в целом описывается четверкой

$$(p, \mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{t}) \in S \times (I\!R^n_+)^m \times \prod_{i=1}^m X_i \times \prod_{i=1}^m T_i.$$

Состояние экономики $(\bar p, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{t}})$ сбалансировано по ресурсам, если

$$(\mathbf{v}) \quad B(\bar t)\bar x + A(\bar t) \le \omega.$$

Если, кроме того, справедливы равенства

$$\bar t_i = \bar t \quad \forall i \in M,$$

то баланс по ресурсам выполняется в сильной форме $(\mathbf{v}')$.

То же состояние сбалансировано по финансам, если выполняется система из двух равенств

$$(\mathbf{vi}) \quad \bar p \cdot [\sum_{i+1}^m B(\bar t)\bar x_i + A(\bar t)] = \bar p \cdot \omega; \quad \sum_{i=1}^m (\bar q_i \cdot \bar t_i) = \bar q \cdot \bar t.$$

Если баланс по ресурсам выполняется в сильной форме, то второе равенство выполняется автоматически и, следовательно, нет смысла включать его в условия финансового баланса. Поэтому баланс по финансам, включающий только первое равенство, обозначается $(\mathbf{vi}')$.

Легко заметить, что из условий $(\mathbf{v}')$ и $(\mathbf{vi}')$ в совокупности следуют $(\mathbf{v})$ и $(\mathbf{vi})$. Обратное, вообще говоря, неверно. Поэтому далее выполнение условий $(\mathbf{v}')$ и $(\mathbf{vi}')$ упоминается как сбалансированность по ресурсам и по финансам в сильной форме. Вместе с тем, в силу неотрицательности $\bar q_i$ второе равенство в условии $(\mathbf{vi})$ влечет

$$\bar q_i \cdot \bar t_i = \bar q_i \cdot \bar t \quad \forall i \in M.$$

Иначе говоря, замена $\bar t_i$ на $\bar t$ не влияет на фактический бюджет потребителя $R_i(\bar p, \bar q, \bar t) - \bar q_i \cdot \bar t_i$, ограничивающий $\bar p \cdot x_i$ при выборе $x_i \in X_i$.

Определение 3. *Состоянием общего равновесия называется четверка*

$$(\bar p, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{t}}) \in S \times (I\!R^n_+)^m \times \prod_{i=1}^m X_i \times \prod_{i=1}^m T_i,$$

удовлетворяющая условиям $(\mathbf{i})$ – $(\mathbf{vi})$, *т.е. такая, что для каждого* i *из* M *пара* $(\bar{x}_i \bar{t}_i)$ – *равновесие потребителя* i *при бюджете* $\bar{r}_i = R_i(\bar{p}, \bar{q}, \bar{t})$ *и ценах* $[\bar{p}]$, $\bar{q}_i$, *тройка* $(\bar{p}, \bar{q}, \bar{t})$ – *производственное равновесие и, кроме того, выполняются условия сбалансированности по ресурсам и по финансам.*

Еще один вариант определения общего равновесия получается при замене условий $(\mathbf{i})$ на $(\mathbf{i}')$, $(\mathbf{v})$ на $(\mathbf{v}')$ и $(\mathbf{vi})$ на $(\mathbf{vi}')$.

Определение 4. *Состоянием общего равновесия называется четверка*

$$(\bar{p}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{t}}) \in S \times (I\!R^n_+)^m \times \prod_{i=1}^m X_i \times \prod_{i=1}^m T_i,$$

такая что для каждого i *из* M *пара* $(\bar{x}_i \bar{t}_i)$ *удовлетворяет условиям* $(\mathbf{i}')$ *и* $(\mathbf{ii})$ *при бюджете* $\bar{r}_i = R_i(\bar{p}, \bar{q}, \bar{t})$ *и ценах* $\bar{p}$, $\bar{q}_i$, *тройка* $(\bar{p}, \bar{q}, \bar{t})$ – *производственное равновесие и, кроме того, выполняются условия сбалансированности по ресурсам и по финансам в сильной форме.*

1.3. Предположения и возможности их ослабления

В дальнейшем при формулировании доказываемых утверждений используются различные комбинации из следующих предположений:

CX) При любом i множество X_i совпадает с $I\!R^l_+$.

CU) Множество $U_i(x_i)$ для каждого x_i из X_i открыто в X_i, выпукло и содержит все точки вида $x_i + y$ при строго положительных y.

CC) Отображение $clU_i : X_i \to X_i$, где $clU_i(x_i)$ – замыкание множества $U_i(x_i)$, полунепрерывно сверху для каждого i.

CH) Множество $U_i(x_i)$ для каждого x_i из X_i представимо в виде

$$U_i(x_i) = \{x'_i \in X_i | g \cdot (x'_i - x_i) + (x'_i - x_i) H_i(x_i)(x'_i - x_i) > 0, \forall g \in G_i(x_i)\},$$

где $G_i(x_i)$ – выпуклый компакт в S, а H_i – симметричная неотрицательно определенная $l \times l$-матрица, причем точечно-множественное отображение $G_i : X_i \to S$ полунепрерывно сверху.

TT) T – интервал в неотрицательном ортанте n-мерного арифметического пространства, т.е.

$$T = \{t \in I\!R^n | t_{min} \le t \le t_{max}\},$$

причем t_{min} и t_{max} неотрицательны.

TC) Компоненты вектора $A(t)$ не убывают, а элементы матрицы $B(t)$ не возрастают по t, причем те и другие – неотрицательные, выпуклые функции от t, определенные на некоторой окрестности множества T. Кроме того, $B(t) = B(t_{max})$ для $t \geq t_{max}$ и $A(t) = A(t_{min})$ для $t \leq t_{min}$.

TI) $T_i = T \quad \forall i \in M$

TB) Подпространство BX, определяемое равенством $x = B(t)x$, не зависит от t, причем векторы $\omega, A(t), B(t)x$ при любых $x \in X$ и $t \in T$ принадлежат BX.

TW) Из условия $B(t)x = 0$ и неотрицательности x следует $x = 0$.

TH) Существует симметричная неотрицательно определенная $l \times l$- матрица H такая, что для любой тройки (p', x', t), удовлетворяющей условиям

$$p' \in S_{t'} \equiv \{p \in S | p \cdot B(t') = p\},$$

$$t' \in Arg \min_{t \in T} [p' \cdot B(t)x' + p' \cdot A(t)],$$

из неравенства

$$p' \cdot (x'' - x') > (x'' - x') \cdot H(x'' - x')$$

следует

$$\min_{t \in T} \{p' \cdot B(t)x'' + p' \cdot A(t)\} > \min_{t \in T} \{p' \cdot B(t)x' + p' \cdot A(t)\}.$$

RS) В совокупности функции дохода удовлетворяют равенству

$$q \cdot t - p \cdot A(t) + p \cdot \omega = \sum_{i=1}^{m} R_i(p, q, t),$$

т.е. прибыль от продажи лицензий и выручка от продажи начальных запасов целиком распределяются между экономическими агентами.

RP) Функция R_i для каждого i неотрицательна, непрерывна и однородна по отношению к масштабу цен, т.е. при любом $s \in R_+$ выполняется равенство

$$sR_i(p, q, t) = R_i(sp, sq, t).$$

RI) Функция дохода R_i для каждого i удовлетворяет тождеству

$$R_i(p, q, t) \equiv R_i([p], q, t),$$

т.е. инвариантна по отношению к замене p на $p' \in [p]$.

2. Существование общего равновесия

2.1. Формулировка теоремы

Теорема 1. *Если выполняются предположения $CX)$, $CU)$, $CC)$, $TT)$, $TB)$, $TC)$, $TI)$, $TW)$, $RS)$, $RP)$, $RI)$, то существует общее равновесие в смысле определения 4.*

Доказательство. Пусть e – единичный вектор в $I\!R^l$, а k – натуральное число. Тогда

$$X_i^k = X_i \bigcap [\{ke\} - I\!R^l_+]$$

– выпуклый компакт в $I\!R^l_+$, так как выполнено предположение $CX)$. В силу предположений $TC)$ и $TW)$ множество

$$XW = \{\mathbf{x} \in \prod_{i=1}^{m} X_i | x - \omega \in XY\},$$

ограничено сверху. В силу предположения $CX)$ оно также ограничено снизу и замкнуто, а потому компактно. Компактны и его проекции $Pr_i XW$ на каждое из подмножеств X_i. Следовательно, при достаточно большом k множество X_i^k содержит в себе $Pr_i XW$. Более того, можно выбрать k таким, что из условий $x_i \in X_i$ и

$$(x_i - x_i') \cdot (x_i - x_i') < 1 \quad \forall x_i' \in Pr_i XW$$

следует $x_i \in X_i^k$. Далее предполагается, что k выбрано достаточно большое, т.е. данное условие выполнено.

Пусть

$$\beta_i^k(p, \varrho) = \{x_i \in X_i^k | p \cdot x_i \leq \varrho\}$$

для каждого i и произвольных $p \in S$, $\varrho \in R_+$, а f_i^k – точечно-множественное отображение из $S \times R$ в X_i^k, сопоставляющее каждой паре (p, ϱ) из $S \times R_+$ множество $f_i^k(p, \varrho)$, где

$$f_i^k(p, \varrho) = \{x_i \in \beta_i^k(p, \varrho) | p \cdot x_i' > \varrho \quad \forall x_i' \in U_i(x_i)\}.$$

Отображение β_i^k, называемое бюджетным отображением, для каждого i выпуклозначно и полунепрерывно снизу. Отображение f_i^k для каждого i

выпуклокомпактнозначно и полунепрерывно сверху в силу предположений $CX), CU), CC)$.

Так как субдифференциальное отображение выпуклокомпактнозначно и полунепрерывно сверху, а $S \times X_i^k \times T$ – выпуклый компакт, то множество

$$Q_i = \bigcup_{(p,x_i,t) \in S \times X_i^k \times T} -\partial_t [p \cdot B(t) x_i]$$

также является выпуклым компактом.

Пусть $Pr(q_i, Q_i)$ – проекция вектора q_i из $I\!R_+^n$ на выпуклый компакт Q_i в том же пространстве, т.е. ближайший к q_i в евклидовой метрике вектор из Q_i. Тогда отображение

$$\varphi : S \times I\!R_+^n \times I\!R_+^l \times T \to Q_i,$$

переводящее точку (p, q_i, x_i, t) в

$$Pr(q_i, -\partial_t [p \cdot B(t) x_i]),$$

непрерывно. Кроме того, пусть

$$\rho : R_+ \times R_+ \to R_+$$

– скалярная функция, принимающая значение $\rho(\xi, \eta) = 1$, если $\xi \geq \eta$ и значение $\rho(\xi, \eta) = \xi \backslash \eta$, если $\xi < \eta$, а F – точечно-множественное отображение выпуклого компакта

$$S \times \prod_{i=1}^m Q_i \times \prod_{i=1}^m X_i^k \times T$$

в себя, представимое как

$$F = \prod_{\nu=1}^4 F_\nu,$$

где функции F_ν с учетом тождеств

$$x \equiv x_1 + ... + x_m, \quad q \equiv q_1 + ... + q_m$$

и соотношения

$$S_t = \{p \in S | p \cdot B(t) = p\}$$

имеют вид:

$$F_1(p,\mathbf{q},\mathbf{x},t)=\{p'\in S_t|(p'-p'')[B(t)x+A(t)-\omega]\geq 0,\forall p''\in S\};$$

$$F_2(p,\mathbf{q},\mathbf{x},t)=\prod_{i=1}^{m}Pr(\rho(R_i(p,q,t),q_i\cdot t)\cdot q_i,-\partial_t[p\cdot B(t)x_i]);$$

$$F_3(p,\mathbf{q},\mathbf{x},t)=f_i^k(p,[R_i(p,q,t)-q_i\cdot t)]_+);$$

$$F_4(p,\mathbf{q},\mathbf{x},t)=Arg\max_{t''\in T}[q\cdot t''-p\cdot A(t'')].$$

Каждое из отображений $F_\nu, \nu=1,...,4$, выпуклокомпактнозначно и полунепрерывно сверху. Следовательно, этими качествами обладает и отображение F. По теореме Какутани о неподвижной точке найдется четверка

$$(p^*,\mathbf{q}^*,\mathbf{x}^*,t^*)\in S\times\prod_{i=1}^{m}Q_i\times\prod_{i=1}^{m}X_i^k\times T,$$

которая является неподвижной точкой отображения F. Остается показать, что эта четверка определяет равновесие. Для этого надо заметить, что из определения отображения F_1 и выбора p^*,t^* следует равенство

$$p^*=p^*\cdot B(t^*),$$

т.е. условие (**iv**), а затем доказать цепочку лемм 1 – 6. Если положить

$$t_i^*=t^*\quad\forall i\in M,$$

то условия ($\mathbf{i}'$) и (**ii**) определения общего равновесия следуют из утверждений лемм 3 и 5, условие (**iii**) – из утверждения леммы 6, а условия ($\mathbf{v}'$) и ($\mathbf{vi}'$) – из утверждений лемм 2 и 4. Следовательно, четверка $(p^*,\mathbf{q}^*,\mathbf{x}^*,\mathbf{t}^*)$ – состояние общего равновесия. Ч.т.д.

2.2. Завершение доказательства теоремы существования

Лемма 1. *Для каждого $i\in M$ справедливо неравенство*

$$R_i(p^*,q^*,t^*)\geq q_i^*\cdot t^*\ \ (\text{где}\ \ q^*=q_1^*+...+q_m^*).$$

Доказательство. Если для некоторого $j \in M$ имеет место

$$R_j(p^*, q^*, t^*) < q_j^* \cdot t^*,$$

то из определения отображения F_3 следует равенство $p^* \cdot x_j^* = 0$ или, что эквивалентно,

$$p^* \cdot B(t^*)x_j^* = 0.$$

Иными словами, в точке t^* неотрицательная функция

$$p^* \cdot B(t)x_j^*$$

от t достигает абсолютного минимума (равного нулю), а тогда

$$0 \in \partial_t[p^* \cdot B(t^*)x_j^*],$$

так как $p^* \cdot B(t)x_j^*$ при $t \geq t^*$ – постоянная функция.

Из определения отображения F_2 следует, что

$$Pr(q_i'', -\partial_t[p^* \cdot B(t^*)x_i^*]) = q_i^*, \;\; \forall i \in M,$$

где

$$q_i'' = \rho(R_i(p^*, q^*, t^*), q_i^* \cdot t^*)q_i^* \quad \forall i \in M,$$

причем

$$q_i^*, 0 \in \, -\partial_t[p^* \cdot B(t^*)x_i^*],$$

откуда

$$q_i'' \in \, -\partial_t[p^* \cdot B(t^*)x_i^*]$$

и, следовательно, $q_i'' = q_i^*$. Это возможно лишь в случае

$$R_i(p^*, q^*, t^*) \geq q_i^* \cdot t^*.$$

Ч.т.д.

Лемма 2. *Справедливо неравенство*

$$\omega \geq B(t^*)x^* + A(t^*),$$

т.е. выполняется материальный баланс при условии возможности свободного расходования ресурсов.

Доказательство. Согласно утверждению леммы 1 и определению отображения F_3 справедливы неравенства

$$p^* \cdot x_i^* + q_i^* \cdot t^* \leq R_i(p^*, q^*, t^*), i \in M.$$

Суммируя их с учетом предположения RS), можно получить неравенство

$$p^* \cdot x^* + p^* \cdot A(t^*) \leq p^* \cdot \omega,$$

которое с учетом $p^* = p^* \cdot B(t^*)$ принимает вид

$$p^* \cdot B(t^*)x^* + p^* \cdot A(t^*) \leq p^* \cdot \omega.$$

Из полученного неравенства и определения отображения F_1 следует

$$p'' \cdot \omega \geq p'' \cdot B(t^*)x^* + p'' \cdot A(t^*) \quad \forall p'' \in S,$$

что возможно только в случае

$$\omega \geq B(t^*)x^* + A(t^*).$$

Ч.т.д.

Лемма 3. *Для каждого i бюджетное ограничение выполняется в виде равенства*

$$p^* \cdot x_i^* + q_i^* \cdot t^* = R_i(p^*, q^*, t^*).$$

Доказательство. Неравенство

$$\omega \geq B(t^*)x^* + A(t^*)$$

означает, в частности, что $\mathbf{x}^*$ принадлежит XW и, следовательно,

$$x_i^* \in Pr_i XW \quad \forall i \in M.$$

Если для некоторого $j \in M$ имеет место строгое неравенство

$$p^* \cdot x_j^* < R_j(p^*, q^*, t^*) - q_j^* \cdot t^*,$$

то в силу выбора k найдется такое $s > 0$, что

$$(x_j^* + se) \in X_j^k, \quad p^* \cdot B(t^*)(x_j^* + se) + q_j^* \cdot t < R_j(p^*, q^*, t^*).$$

При этом

$$(x_j^* + se) \in U_j(x_j^*)$$

в силу предположения CU). Тогда x_j^* не может принадлежать

$$f_i^k(p^*, R_i(p^*, q^*, t^*) - q_i^* \cdot t^*)$$

и, следовательно, $\mathbf{x}^*$ не может принадлежать $F_3(p^*, \mathbf{q}^*, \mathbf{x}^*, t^*)$. Поэтому для всех i выполняются равенства

$$p^* \cdot B(t^*)x_i^* + q_i^* \cdot t^* = R_i(p^*, q^*, t^*).$$

Ч.т.д.

Лемма 4. *Справедливо равенство*

$$p^* \cdot B(t^*)x^* + p^* \cdot A(t^*) = p^* \cdot \omega,$$

т.е. выполняется условие ($\mathbf{vi}'$).

Доказательство. Суммируя равенства

$$p^* \cdot x_i^* + q_i^* \cdot t^* = R_i(p^*, q^*, t^*)$$

по i от 1 до m, и учитывая предположение RS), получим требуемое соотношение

$$p^* \cdot B(t^*)x^* + p^* \cdot A(t^*) = p^* \cdot \omega.$$

Ч.т.д.

Лемма 5. *Для каждого* $i \in M$ *пара* (x_i^*, t^*) *– равновесие потребителя* i *при ценах* p^*, q_i^*, *т.е. удовлетворяет условиям* ($\mathbf{i}'$) *и* ($\mathbf{ii}$).

Доказательство. Из определения отображения F_2 следует, что

$$q_i^* \in -\partial_t[p^* \cdot B(t^*)x_i^*]$$

для каждого i, откуда следует ($\mathbf{ii}$). Чтобы проверить выполнение ($\mathbf{i}'$), достаточно показать, что не существует потребительского набора $x_i \in U_i(x_i^*)$, удовлетворяющего неравенству

$$p^* \cdot x_i \leq p^* \cdot x_i^*.$$

Если такой x_i существует, то выпуклое открытое множество $U_i(x_i^*)$ вместе с x_i содержит $x_i^s = x_i^* + s(x_i - x_i^*)$, где $1 > s > 0$, так как $x_i^* \in clU_i(x_i^*)$. Выбирая s достаточно малым, так что

$$(x_i^s - x_i^*) \cdot (x_i^s - x_i^*) < 1,$$

получим $x_i^s \in X_i^k$. Существование такого x_i^s противоречит определению отображения F_3. Следовательно, (x_i^*, t^*) – равновесие потребителя i при ценах p^*, q_i^*. Ч.т.д.

Лемма 6. *Если* $(p^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{q}^*, t^*)$ *– неподвижная точка отображения* F, *то*

$$t^* \in Arg \max_{t \in T} [q^* \cdot t - p^* \cdot A(t)].$$

Доказательство. Следует непосредственно из определения отображений F_4 и F. Ч.т.д.

Замечание 1. Если в формулировке теоремы 1 предположение $CU)$ заменить на $CH)$, то утверждение теоремы остается в силе. В самом деле, для каждого $i \in M$ отображение U_i можно заменить на $\check{U}_i$, где

$$\check{U}_i(x_i) = U_i(x_i) + I\!R^l_{++} \quad \forall x_i \in X_i.$$

Отображение $\check{U}_i$ удовлетворяет условию $CU)$, следовательно, при соответствующей замене равновесие существует. Но если $(p^*, \mathbf{q}^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*)$ – равновесие в экономике, получаемой заменой U_i на $\check{U}_i$ для каждого i, то та же четверка – равновесие в исходной экономике. В этом легко убедиться, проверив последовательно все условия.

Замечание 2. Если выполняется условие $CH)$, причем $(p^*, \mathbf{q}^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*)$ – равновесие, то $p^* \in G_i(x_i^*)$ для каждого i. В самом деле, если это не так, то для некоторого i найдется $x_i \in U_i(x_i^*)$, такой что

$$p^* \cdot x_i < p^* \cdot x_i^*.$$

Найдется $s > 0$ такое маленькое, что

$$sp^*(x_i - x_i^*) + s(x_i - x_i^*) \cdot Hs(x_i - x_i^*) < 0.$$

Однако, при этом

$$x_i^* + s(x_i - x_i^*) \in U_i(x_i^*),$$

что противоречит предположению $CH)$. Ч.т.д.

2.3. Конечность числа равновесных состояний

Вопрос о числе равновесных состояний в экономике с эндогенным техническим прогрессом и двухэтапным ценообразованием решается точно так же, как и для других моделей равновесного типа, например, для модели чистого обмена. Для основателя теории равновесия Л. Вальраса удовлетворительным ответом на данный вопрос представлялась простая ссылка на совпадение числа уравнений, описывающих модель, с числом независимых переменных, откуда он делал вывод о единственности состояния равновесия. Аналогичные по сути рассуждения лежат и в основе современного подхода к вопросу, однако дело не сводится лишь к подсчету числа уравнений и переменных [15]. Основная трудность заключается в обосновании правомерности такого подсчета [16]. Обычно она преодолевается с привлечением соображений общего положения [17]. Однако, при наличии развитой математической техники всегда можно выбрать подходящее определение регулярной экономики и свести вопрос о дискретности множества равновесий к совпадению числа уравнений модели с числом переменных. Иными словами, можно считать почти состоявшимся частичный возврат к исходной позиции Л. Вальраса. Возврат надо признать лишь частичным, так как речь идет не о единственности равновесия, а только о дискретности множества равновесий, к тому же современные модели равновесия не формулируются в виде систем уравнений, а иногда и не сводятся к таким системам. Вместе с тем, стандартный путь доказательства теорем о конечности числа равновесий включает построение системы уравнений, число которых совпадает с числом переменных, причем каждому равновесию модели соответствует решение данной системы, хотя обратное не обязательно. Эта часть доказательства, как правило, элементарна, т.е. не требует сколько-нибудь сложной математической техники, но именно в ней заключается суть дела, так как количество уравнений и переменных определяется исходной моделью. Когда же такая система получена, остается лишь подходящим образом выбрать пространство всех экономик и подмножество регулярных экономик в этом пространстве. Технически эта часть доказательств намного сложнее, чем построение системы уравнений, так как она опирается на разные варианты теоремы Р. Тома о трансверсальности и на теорию стратифицированных многообразий.

Далее в этом разделе предполагается, что все коэффициенты матрицы $B(t)$ и компоненты вектора $A(t)$ – функции класса C^1, определенные на некоторой окрестности $V(T)$ множества T.

Если данное отображение должно быть класса C^1, то удобно с самого начала предположить, что задано гладкое разложение единицы

$$e_r \in C^1(S \times I\!\!R^n \times I\!\!R^{\check{L}}_+ \times T, P^M_+),$$

сопоставляющее четверке (p, q, ω, t) вектор

$$e_r(p, q, \omega, t) \in P^M_+,$$

т.е. неотрицательный n-мерный вектор, сумма компонент которого равна единице. Тогда отображение распределения прибыли определяется равенством

$$r(p, q, \omega, t) = [q \cdot t - p \cdot A(t) + p \cdot \omega] e_r(p, q, \omega, t).$$

Экономику можно представить как произвольный элемент

$$\varepsilon = (\mathbf{g}, (A, B), \omega, e_r)$$

пространства

$$\mathcal{E} = [C^1_w(I\!\!R^l_+, S)]^m \times [C^1_w(T, I\!\!R^{\check{L}}) \times C^1_w(T, I\!\!B^{\check{L}})] \times I\!\!R^{\check{L}}_+ \times C^1(S^{l-1} \times I\!\!R^n \times I\!\!R^{\check{L}}_+ \times T, P^M_+).$$

С учетом $t_i = t$ для всех $i \in M$ состояние экономики в целом описывается четверкой

$$(p, \mathbf{q}, \mathbf{x}, t) \in Y = S^{l-1} \times (I\!\!R^n)^m \times (I\!\!R^l_+)^m \times T,$$

где S^{l-1} – единичная сфера размерности $l-1$. Использование единичной сферы вместо стандартного симплекса в качестве множества допустимых цен связано с применяемой техникой и не имеет принципиального значения. Многообразие Y далее называется пространством состояний экономики, а его произвольный элемент обозначается через y.

Теорема 2. *В пространстве экономик $\mathcal{E}$ существует открытое всюду плотное подмножество $\mathcal{E}_{\pitchfork}$ такое, что множество состояний общего равновесия в сысле определения 4. для любой экономики из $\mathcal{E}_{\pitchfork}$ конечно.*

Доказательство теоремы дано в [20].

Замечание. Из утверждения теоремы 2 не следует, вообще говоря, что в условиях общего положения конечно число состояний общего равновесия в смысле определения 3, так как определение 4 сильнее, а отвечающих ему состояний равновесия меньше.

Чтобы получить утверждение о конечности числа состояний общего равновесия в смысле определения 3, надо построить другое пространство состояний экономики с учетом размерности вектора $\mathbf{t}$ и набора равенств, получаемых из условий $\bar{q}_i \cdot \bar{t}_i$ и неотрицательности векторов $\bar{q}_i$ и $\bar{t}_i$. В остальном ход рассуждений тот же, что и при доказательстве теоремы 2.

3. Эффективность общего равновесия

3.1. Первая теорема эффективности для общего равновесия

Эффективность равновесия в рассматриваемой экономике естественно понимать как оптимальность по Парето соответствующего данному равновесию распределения ресурсов.

Определение 5. *Сбалансированная по ресурсам в смысле условия* $(\mathbf{v})$ *пара*

$$(\mathbf{x}', \mathbf{t}') \in \prod_{i=1}^{m} X_i \times \prod_{i=1}^{m} T_i$$

называется оптимальной по Парето, если не существует пары

$$(\mathbf{x}'', \mathbf{t}'') \in \prod_{i=1}^{m} clU_i(x_i') \times \prod_{i=1}^{m} T_i,$$

сбалансированной по ресурсам в том же смысле, причем такой, что

$$x_j'' \in U_j(x_j')$$

для некоторого $j \in M$.

Иными словами, оптимальность по Парето означает, что нельзя улучшить положение хотя бы одного потребителя, не нарушая материальный баланс и не ухудшая положение других.

Определение 6. *Состояние равновесия* $(p^*, \mathbf{q}^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*)$ *называется эффективным, если пара* $(\mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*)$ *оптимальна по Парето.*

Теорема 3. *Если для каждого* $i \in M$ *справедливы предположение* CH) *и* TH), *а матрица* $(H_i - mH)$ *неотрицательно определена, т.е. выполняется неравенство*

$$y \cdot (H_i - mH)y \geq 0 \quad \forall y \in I\!R^l,$$

то равновесие в смысле определения 4 эффективно.

Доказательство теоремы опирается на следующую лемму.

Лемма 7. *Для любых*

$$\mathbf{x}, \mathbf{x}^* \in \prod_{i=1}^{m} X_i$$

справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} [(x_i - x_i^*) \cdot mH(x_i - x_i^*)] \geq (x - x^*) \cdot H(x - x^*).$$

Доказательство. Матрица H симметрична и неотрицательно определена. Следовательно, существует симметричная, неотрицательно определенная матрица $(H)^{1/2}$, доставляющая решение матричному уравнению

$$Z^2 = (H).$$

Пусть

$$z_i = (H)^{1/2}(x_i - x_i^*), \forall i \in M.$$

Тогда для любых $i, j \in M$ справедливо равенство

$$z_i \cdot z_j = (x_i - x_i^*) \cdot H(x_j - x_j^*).$$

Это следует из симметричности матрицы $(H)^{1/2}$.

Из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим следует $z_i \cdot z_i + z_j \cdot z_j \geq 2z_i \cdot z_j$, откуда

$$m\sum_{i=1}^{m}(z_i \cdot z_i) \geq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} z_i \cdot z_j = (\sum_{i=1}^{m} z_i) \cdot (\sum_{j=1}^{m} z_j).$$

Если в этом неравенстве заменить $z_i \cdot z_j$ на $(x_i - x_i^*) \cdot H(x_j - x_j^*)$, то получится утверждение леммы. Ч.т.д.

Доказательство теоремы 3.

Пусть $(p^*, \mathbf{q}^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*)$ – общее равновесие в смысле определения 3. Если оно не эффективно, то существуют такие

$$\mathbf{x}'' \in \prod_{i=1}^{m} clU_i(x_i^*); \quad t'' \in T,$$

что x_i'' принадлежит $U_i(x_i^*)$ хотя бы для одного i и

$$B(t'')x'' + A(t'') \leq \omega.$$

При этом

$$p^* \cdot B(t^*)x^* + p^* \cdot A(t^*) = p^* \cdot \omega$$

и $p^* \in G_i(x_i^*)$ для каждого i в силу замечания 2 к теореме 1. В силу предположения $CH)$ отсюда следует справедливость неравенства

$$p^* \cdot (x_i'' - x_i^*) \geq (x_i'' - x_i^*) \cdot H_i(x_i'' - x_i^*)$$

для каждого i, причем хотя бы для одного i неравенство строгое. Суммирование полученных неравенств по $i \in M$ с учетом неотрицательной определенности матриц $(H_i - mH)$ для всех $i \in M$ и леммы 7 дает неравенство

$$p^* \cdot (x'' - x^*) > (x'' - x^*) \cdot H(x'' - x^*).$$

Откуда с учетом предположения $TH)$ следует

$$\min_{t \in T}\{p^* \cdot B(t)x'' + p^* \cdot A(t)\} > p^* \cdot B(t^*)x^* + p^* \cdot A(t^*) = p^* \cdot \omega,$$

а потому,

$$p^* \cdot B(t'')x'' + p^* \cdot A(t'') > p^* \cdot \omega,$$

что противоречит исходному предположению

$$B(t'')x'' + A(t'') \leq \omega.$$

Из полученного противоречия следует утверждение теоремы. Ч.т.д.

3.2. Сильное равновесие. Первая теорема эффективности

Если изменить условия индивидуальной рациональности в потреблении, введя понятие сильного равновесия потребителя и, соответственно, сильного равновесия для экономики в целом, то можно получить гораздо более сильную теорему эффективности. В соответствии с этой концепцией потребитель оптимизирует свое потребление сразу по двум группам переменных: по $x_i \in X_i$ и по $t_i \in T_i$.

Определение 7. *Сильным равновесием потребителя при заданных ценах* $[p^*]$, q_i^* *и бюджете* r^* *называется пара*

$$(x_i^*, t_i^*) \in X_i \times T_i,$$

удовлетворяющая условию

$$U_i(x_i^*) \times T_i \bigcap \{(x_i, t_i) \in X_i \times T_i | p^* \cdot B(t_i) x_i + q_i^* \cdot t_i \leq r^*\} = \emptyset.$$

В соответствии с концепцией сильного равновесия в потреблении должно быть модифицировано также понятие общего равновесия для экономики в целом. При этом понятие производственного равновесия стандартно, а условия баланса выполнения в сильной форме, т.е. $(\mathbf{v}')$ и $(\mathbf{vi}')$.

Определение 8. *Сильным равновесием называется четверка*

$$(p^*, \mathbf{q}^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*) \in S \times (I\!R^n)^m \times \prod_{i=1}^{m} X_i \times \prod_{i=1}^{m} T_i,$$

удовлетворяющая следующим условиям:

a) для каждого $i \in M$ *пара* (x_i^*, t_i^*) *– сильное равновесие потребителя при ценах* $[p^*]$, ${q_i}^*$ *и бюджете* $R_i(p^*, q^*, t^*)$;

b) тройка (p^*, q^*, t^*) *— производственное равновесие, т.е.*

$$t^* \in Arg \max_{t \in T} [q^* \cdot t - p^* \cdot A(t)];$$

$$p^* \cdot B(t^*) = p^*.$$

c) соблюдается баланс по ресурсам

$$B(t^*)x^* + A(t^*) \le \omega; \quad t_i^* = t^* \quad \forall i \in M$$

и финансовый баланс

$$p^* \cdot B(t^*)x^* + p^* \cdot A(t^*) = p^* \cdot \omega,$$

т.е. выполняются условия (**vi**) *и* (**vi**$'$).

Интерпретация условий $a) - c)$ достаточно очевидна, т.е. $a)$ – условие индивидуальной рациональности, причем необычность его сводится к невыпуклости бюджетного множества; условия $b)$ и c) стандартны.

Теорема 4. *Если выполняются предположения RS), TI), а четверка*

$$(p^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{q}^*, \mathbf{t}^*) \in S \times (I\!R^n)^m \times \prod_{i=1}^m X_i \times \prod_{i=1}^m T_i$$

— сильное равновесие, то пара $(\mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*)$ *оптимальна по Парето.*

Доказательство. Предположим, что пара $(\mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*)$ не оптимальна по Парето, т.е. найдется пара

$$(\mathbf{x}'', t'') \in \prod_{i=1}^m clU_i(x_i^*) \times T,$$

такая что

$$\omega \ge B(t'')x'' + A(t''),$$

причем $x_j'' \in U_j(x_j^*)$ для некоторого $j \in M$. Тогда для каждого $i \in M$ справедливо неравенство

$$p^* \cdot B(t'')x_i'' + q_i^* \cdot t'' - R_i(p^*, q^*, t^*) \ge 0,$$

причем для $i = j$ имеет место строгое неравенство, что следует с учетом TI) из условия a) определения 8. Действительно, если для некоторого i выполняется противоположное неравенство, то бюджетное ограничение выполняется не только для x_i'', но и для всех точек из некоторой его окрестности. А эта окрестность имеет непустое пересечение с $U_i(x_i^*)$. Сумма этих неравенств с учетом предположения RS) дает строгое неравенство

$$p^* \cdot B(t'')x'' + q^* \cdot t'' - q^* \cdot t^* + p^* \cdot A(t^*) - p^* \cdot \omega > 0.$$

Из условия $b)$ в определении 8 следует, что

$$q^* \cdot t'' - q^* \cdot t^* \leq p^* \cdot A(t'') - p^* \cdot A(t^*).$$

Неравенство

$$p^* \cdot B(t'')x'' + p^* \cdot A(t'') - p^* \cdot \omega > 0,$$

получаемое после соответствующей замены, с учетом неотрицательности p^* противоречит первоначальному предположению о неотрицательности

$$\omega - B(t'')x'' - A(t'').$$

Полученное противоречие завершает доказательство.

Замечание. Теорема 4 доказана всего при двух предположениях $TI)$ и $RS)$. Это связано с определением равновесия потребителя. С этим же определением связано то, что далеко не любую оптимальную по Парето пару $(\mathbf{x}', \mathbf{t}')$ можно достроить до состояния равновесия, выбирая цены и бюджетное отображение.

В самом деле, рассмотрим экономику с одним воспроизводимым и одним невоспроизводимым продуктами, скалярным t и двумя потребителями. Пусть $\omega = (0, 1)$, т.е. количество невоспроизводимого продукта в экономике равно 1, для достижения технологического уровня t затрачивается t единиц невоспроизводимого продукта, т.е. $A(t) = (0, t)$, а для производства x единиц воспроизводимого продукта затрачивается $x/(4t)$ единиц невоспроизводимого, т.е. матрица $B(t)$ имеет два ненулевых элемента, соответствующих затратам невоспроизводимого продукта. Один из них $b(t) = 1/4t$, что соответствует затратам при производстве воспроизводимого продукта, второй 1, что формально надо понимать как затраты на производство невоспроизводимого продукта из него же (тривиальная технология). Предпочтения потребителей определены на множестве неотрицательных продуктовых наборов и определяются линейными формами $C_1 = (1/2, 9/16)$ и $C_2 = (1, 0)$. Последнее означает, что первый потребитель предпочитает невоспроизводимый продукт, но может заменять его несколько большим количеством воспроизводимого, а второй потребляет только воспроизводимый продукт.

Рассмотрим оптимальное по Парето состояние экономики, когда весь невоспроизводимый продукт расходуется на создание технологии и производство невоспроизводимого продукта, причем оба потребителя что-то получают, например, весь производимый продукт x делится между ними поровну. Данное распределение невозможно реализовать как равновесное.

При оптимальном соотношении t и x должно выполняться равенство

$$D_t[b(t)x + t] = 0,$$

откуда следует $x = 4t^2$. При этом $x/t + t = 1$, откуда следует $x = 1, t = 1/2$. Так как производимый продукт делится между потребителями поровну, каждый из них получает по $1/2$ воспроизводимого продукта. Нормируя цены, получим $p = (1/3, 2/3)$ и, следовательно $q = 2/3$. Поскольку $x_1 = x_2$ должно выполняться равенство $q_1 = q_2$, откуда с учетом $q = 2/3$ получаем $q_1/3 = q_2 = 1/3$. При таких ценах затраты первого потребителя равны $1/3$ (т.е. именно столько должен составлять его бюджет) при полезности $1/4$. Не вкладывая ничего в технологию и просто потребляя невоспроизводимый продукт на ту же сумму, он может иметь полезность $9/32$, т.е. для него исходное решение не является индивидуально рациональным. Отсюда следует, что рассматривая оптимальная по Парето точка не может быть реализована как сильное равновесие ни при каких $R_i, i = 1, 2$.

3.3. Вторая теорема эффективности

Вторая теорема эффективности равновесия может быть доказана для другого аналога общего равновесия по Вальрасу, которое удобно определить через вспомогательное понятие квазиравновесия.

Определение 9. *Квазиравновесием потребителя i при заданных ценах $[\bar{p}]$ и $\bar{q}_i$ называется пара*

$$(\bar{x}_i, \bar{t}_i) \in X_i \times T_i,$$

удовлетворяющая условиям:

$$U_i(\bar{x}_i) \bigcap \{x_i \in X_i | \bar{p} \cdot B(\bar{t}_i)x_i \leq \bar{p} \cdot B(\bar{t}_i)\bar{x}_i\} = \emptyset;$$

$$\bar{t}_i \in Arg \min_{t_i \in T} [B(t_i)\bar{x}_i + \bar{q}_i \times t_i].$$

Соответственно, понятие квазиравновесия для экономики в целом определяется, как и понятие общего равновесия, но с заменой условия равновесия потребителя на условие квазиравновесия.

Определение 10. *Квазиравновесием в экономике называется четверка*

$$(p^*, \mathbf{q}^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*) \in S \times (I\!R^n)^m \times (I\!R^l_+)^m \times \prod_{i=1}^{m} T_i,$$

удовлетворяющая следующим условиям:

a) для каждого $i \in M$ пара (x_i^*, t_i^*) – квазиравновесие потребителя при ценах $[p^*], q_i{}^*$;

b) тройка (p^*, q^*, t^*) – производственное равновесие, т.е.

$$t^* \in Arg \max_{t \in T} [q^* \cdot t - p^* \cdot A(t)]; \quad p^* \cdot B(t^*) = p^*;$$

c) соблюдается баланс по ресурсам

$$B(t^*)x^* + A(t^*) \leq \omega; \quad t_i^* = t^* \quad \forall i \in M;$$

и по финансам

$$p^* \cdot B(t^*)x^* + p^* \cdot A(t^*) = p^* \cdot \omega.$$

Теорема 5. *Если пара $(\mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*)$ оптимальна по Парето, причем $t_i = t$ для всех $i \in M$ и выполняются условия $CU), TT), TB), TC)$, $TI)$, то найдется такая система цен $p^*, \mathbf{q}^*$, что четверка $(p^*, \mathbf{q}^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*)$ – квазиравновесие.*

Доказательство. Условие сбалансированности по ресурсам предполагается выполненным по определению $(\mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*)$, где $t_i^* = t^*$ для любого $i \in M$. Остается построить систему цен, удовлетворяющую условиям $a), b)$, и закону Вальраса. Для этого нужно сначала получить пару (p^*, q^*), удовлетворяющую закону Вальраса и условию $b)$, а затем найти набор $\mathbf{q}^*$, удовлетворяющий условиям $a)$ и $q^* = \sum_{i=1} q_i^*$.

Пересечение выпуклых множеств

$$U(x^*) = \sum_{i=1}^{m} U_i(x_i^*) \quad \text{и} \quad XW(t^*) = \{x \in X | B(t^*)x \leq \omega - A(t^*)\}$$

пусто, так как в противном случае пара $(\mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*)$ не оптимальна по Парето. Множество $U(x^*)$ открыто в силу предположения $CU)$, следовательно, его можно строго отделить от $XW(t^*)$ гиперплоскостью, т.е. найдется $g \in I\!R^l$, такой что

$$g \cdot (x'' - x^*) > 0$$

для всех $x'' \in U(x^*)$ и

$$g \cdot (x - x^*) \leq 0,$$

если

$$B(t^*)(x) \leq \omega - A(t^*).$$

Последнее в частности означает, что

$$g \cdot (x - x^*) \leq 0,$$

если

$$B(t^*)(x - x^*) \leq 0.$$

Множество гиперплоскостей, разделяющих множества $U(x^*)$ и $XW(t^*)$, совпадает с множеством опорных гиперплоскостей к выпуклому множеству

$$U(x^*) - XW(t^*),$$

проходящих через начало координат. Следовательно, выпуклый конус

$$KG(x^*, t^*),$$

состоящий из всех таких g, совпадает с конусом, сопряженным касательному конусу к множеству

$$U(x^*) - XW(t^*)$$

в точке $\mathbf{0}$. Конус

$$KG(x^*, t^*)$$

замкнут, так как множество $U_i(x_i^*)$ открыто, кроме того

$$KG(x^*, t^*) + \Gamma^+(x^*) = KG(x^*, t^*).$$

При этом

$$KG(x^*, t^*) \subset I\!R^l_+,$$

так как из условий $CU)$ и

$$g \cdot (x - x^*) > 0, \quad \forall x \in U(x^*)$$

следует неотрицательность g. Следовательно, конус $KG(x^*,t^*)$ заостренный. Кроме того,

$$[KG(x^*,t^*)\bigcap S]\subset S_{t^*}$$

и

$$g\cdot B(t^*)x^*+g\cdot A(t^*)=g\cdot\omega,$$

т.е. выполняется закон Вальраса. В самом деле, пусть

$$p\in KG(x^*,t^*)\bigcap S,$$

тогда

$$p\cdot y=0\quad\forall y\in kerB(t^*)=\{x\in I\!\!R^l|B(t^*)x=0\},$$

так как одновременно неположительны $p\cdot y$ и $p\cdot(-y)$. В силу предположения $TB)$ для любого y вектор $y-B(t^*)y$ принадлежит $kerB(t^*)$. Следовательно, для любого y справедливо равенство

$$p\cdot y-p\cdot B(t^*)y=0$$

или, что то же самое, $p\in S_{t^*}$. Чтобы получить закон Вальраса, надо взять

$$x''=\omega-A(t^*).$$

Тогда

$$g\cdot(x''-x^*)\geq 0$$

в силу неотрицательности g и $x''-x^*$, но одновременно

$$g\cdot(x''-x^*)\leq 0,$$

так как

$$B(t^*)x''\leq\omega-A(t^*).$$

Каждому $p\in I\!\!R^l_+$ соответствует выпуклое замкнутое множество

$$D(x^*,t^*)=\{p\}\times\partial_t[p\cdot B(t^*)x^*+p\cdot A(t^*)]\subset I\!\!R^{l+n}_+.$$

Объединение всех таких множеств – выпуклый замкнутый конус в том же пространстве, обозначаемый $KD(x^*,t^*)$. В силу неотрицательности всех p этот конус заостренный.

Если заостренные конусы $KD(x^*, t^*)$ и

$$KG(x^*, t^*) \times \Gamma^+(t^*)$$

не пересекаются, то их можно разделить гиперплоскостью, проходящей через 0, причем так, что конус $KD(x^*, t^*)$ лежит в одном открытом полупространстве, а конус

$$KG(x^*, t^*) \times \Gamma^+(t^*) \supset KG(x^*, t^*) \times \{0\}$$

– в другом открытом полупространстве. Иными словами, существует вектор

$$\Delta = (\Delta x, \Delta t) \in I\!R^l,$$

такой что

$$g \cdot \Delta x > 0, \forall g \in KG(x^*, t^*); \quad \gamma \cdot \Delta t > 0, \forall \gamma \in \Gamma^+(t^*); \quad d \cdot \Delta, \forall d \in KD(x^*, t^*).$$

Из первых двух неравенств следует

$$\Delta x \in \Gamma^{++}(x^*) = \Gamma(x^*)$$

и

$$\Delta t \in \Gamma^{++}(t^*) = \Gamma(t^*),$$

т.е. направление Δ допустимо. Кроме того, согласно первому из них найдется $s \in R_+$, при котором

$$s\Delta x \in U(x^*) - XW(t^*).$$

Действительно, если такого s не существует, то проходящая через 0 прямая, порождаемая вектором Δx, не пересекается с этим множеством. По теореме Хана-Банаха существует $g \in I\!R^l$, для которого

$$g \cdot \Delta x = 0, \quad g \cdot y > 0, \quad \forall y \in U(x^*) - XW(t^*).$$

Последнее означает

$$g \in KG(t^*),$$

но тогда должно быть $g \cdot \Delta x > 0$. Из полученного противоречия следует

$$\Delta x \in U(x^*) - XW(x^*, t^*).$$

Из третьего неравенства следует, что при любом $p \in S$ функция

$$p \cdot B(t)x + p \cdot A(t)$$

строго убывает по направлению Δ. В частности это значит, что при достаточно малых $s \in R_+$ и

$$(x', t') = (x^* + \Delta x, t^* + \Delta t)$$

справедливо неравенство

$$\omega - B(t')x' - A(t') \geq 0.$$

Таким образом, пара $(\mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*)$ не оптимальна по Парето, что противоречит исходному предположению.

Следовательно, конусы

$$KG(x^*, t^*) \times \Gamma^+(t^*)$$

и

$$KD(x^*, t^*)$$

имеют нетривиальное пересечение, т.е. найдется $p^* \in S_{t^*}$, такой что

$$\partial_t[p^* \cdot B(t^*)x^* + p^* \cdot A(t^*)] \bigcap \Gamma^+(t^*) \neq \emptyset.$$

Поэтому можно выбрать

$$q^* \in [-\partial_t p^* \cdot B(t^*)x^*] \bigcap [\partial_t p^* \cdot A(t^*) - \Gamma^+(t^*)].$$

Остается построить систему индивидуальных цен

$$\mathbf{q}^* = \{q_i^*\}_{i=1}^m,$$

такую что

$$q_i^* \in -\partial_t p^* \cdot B(t^*)x_i^*$$

для каждого i и справедливо равенство

$$q^* = \sum_{i=1}^m q_i^*.$$

Это можно сделать, так как субдифференциал функции $p^* \cdot B(t^*)x^*$ представим как взвешенная сумма субдифференциалов элементов матрицы $B(t^*)$, причем весовыми коэффициентами являются элементы векторов p^*, x^*. Если вместо элементов вектора x^* взять в качестве весовых коэффициентов элементы вектора x_i^*, то получим

$$\partial_t p^* \cdot B(t^*)x_i^*.$$

При этом

$$\sum_{i=1}^{m} \partial_t p \cdot B(t^*)x_i^* = \partial_t p \cdot B(t^*)x^*,$$

так как $x^* = \sum_{i=1}^{m} x_i^*$.

Из условия

$$p^* \cdot x'' > p^* \cdot x^* \quad \forall x'' \in U(x^*)$$

следует, что

$$p^* \cdot x_i'' > p^* \cdot x_i^* \quad \forall x_i'' \in U_i(x_i^*)$$

при любом i. Действительно, для любого $j \in M$ можно выбрать $\mathbf{x}''$, так что $x_j'' \in U_j(x_j^*)$ и $x_i'' = x_i^*, i \neq j$. Тогда $x'' \in U(x^*)$ в силу открытости $U_j(x_j^*)$ и, следовательно,

$$p^* \cdot (x'' - x^*) > 0.$$

При этом

$$x'' - x^* = x_j'' - x_j^*.$$

Откуда следует

$$p^* \cdot (x_j'' - x_j^*) > 0.$$

Таким образом, для каждого i выполняются необходимые и достаточные условия квазиравновесия потребителя. Ч.т.д.

4. Концепции производственного равновесия

В данном разделе основное внимание уделено вопросам ценообразования с точки зрения производства. Главный из них – преодоление противоречия между использованием цен на основе предельных издержек и окупаемостью производства.

4.1. Расширенное производственное равновесие

Представление производственного сектора в агрегированном виде не означает, вообще говоря, что он представлен одной фирмой, т.е. описывается ситуация монополии. Например, можно предположить, что собственность на все фирмы и ресурсы прямо или косвенно распределена между физическими лицами (потребителями), а все производственные вопросы решаются на договорной основе. Такое предположение тем более привлекательно, если иметь в виду процесс декапитализации бизнеса, когда ведущие фирмы стремятся вынести во вне любые материальные производства [4].

Предполагается, что производственный сектор функционирует некоторым «оптимальным» (при заданных ценах) образом. В условиях выпуклого технологического множества «оптимальность» обычно понимают как максимизацию прибыли, но тот же подход нуждается в корректировке, если технологическое множество не выпукло [11].

Далее (до конца раздела) предполагается, что справедливы предположения $TT)$, $TB)$ и $TC)$, что позволяет воспользоваться понятием sup-стационарной точки квазидифференцируемой функции [12], в котором обобщено понятие точки максимума вогнутой функций, т.е. в sup-стационарной точке производные по всем направлениям неположительны. Цены p, q, если они заданы извне, считаются неотрицательными.

Производственный сектор в широком смысле слова включает в себя производство всех потребляемых благ. При таком подходе потребитель либо не принимает участия в выборе технологического уровня $t \in T$, либо делает это в ином качестве (не в качестве потребителя). В качестве потребителя он приобретает лишь потребляемые блага, расплачиваясь за них по ценам $p \in S$. Соответственно, производитель получает деньги за производимую продукцию, реализуя ее по тем же ценам p. Суммарную прибыль (убыток) производственного сектора можно представить как линейную форму

$$p \cdot (x - y), \quad (x - y) \in XY = \bigcup_{t \in T} Y(t),$$

или как нелинейную функцию

$$\pi_p : X \times T \to R,$$

определяемую равенством

$$\pi_p(x,t) = p \cdot x - p \cdot B(t)x - p \cdot A(t), \quad \forall (x,t) \in X \times T.$$

Второй способ представления предпочтительнее, так как условия $TT)$, $TC)$ и $TB)$ сформулированы применительно к $B(t)$ и $A(t)$, а не к XY. Вместе с тем, первый вариант представления позволяет наглядно продемонстрировать невыпуклость технологического множества XY при том, что при каждом $t \in T$ множество $Y(t)$ выпукло.

Функция π_p в предположении $TC)$ выпукло-вогнута, т.е. выпукла (даже линейна) по x и вогнута по t, следовательно, квазидифференцируема. Ее можно представить в виде

$$\pi_p(x,t) = [p \cdot x - p \cdot B(t)x - q \cdot t] + [q \cdot t - p \cdot A(t)],$$

т.е. в виде суммы двух функций, первая из которых выпукло-вогнута и представляет баланс доходов и расходов от чисто производственной деятельности, включая расходы на приобретение лицензий на использование технологий, а вторая вогнута и представляет прибыль от реализации лицензий на использование технологий, т.е. интеллектуальной собственности. Разумеется, если вся деятельность, относящаяся к производству, сосредоточена в одной фирме, то торговли лицензиями не существует. Однако, как уже подчеркивалось выше, представление производственного сектора в агрегированном виде, не означает, что он представлен одной фирмой.

Чтобы сделать следующий шаг, необходимо модифицировать понятие производственного равновесия.

Определение 11. *Расширенным производственным равновесием называется такая четверка (p, q, x', t'), что (x', t') – sup-стационарная точка функции*

$$p \cdot x - p \cdot B(t)x - q \cdot t,$$

а t' – sup-стационарная точка функции $q \cdot t - p \cdot A(t)$.

Замечание. Для вогнутой функции $q \cdot t - p \cdot A(t)$ понятие sup–стационарной точки совпадает с понятием точки максимума на T.

Чтобы описать sup–стационарные точки всех трех функций прибыли, необходимо напомнить некоторые обозначения.

Для любой выпукло-вогнутой функции $f(x,t)$ через $\partial_x f(x',t')$ обозначается субдифференциал в точке x' выпуклой функции $f(x,t')$ от x при фиксированном t'. Супердифференциал вогнутой функции $f(x',t)$ в точке t' представим в виде $-\partial_t[-f](x',t')$, т.е. через субдифференциал выпуклой функции $-f(x',t)$ от t (при фиксированном x'). Через

$$\pi_p(\cdot,t') : X \to R$$

обозначается зависимость прибыли от x при фиксированных p и t', через

$$\pi_p(x',\cdot) : X \to R$$

зависимость прибыли от t при фиксированных p и x'.

Утверждение 1. *Если (p,q,x',t') – расширенное производственное равновесие, то (x',t') – sup-стационарная точка функции π_p и, наоборот, каждая sup-стационарная точка функции π_p реализуема как расширенное производственное равновесие.*

Доказательство. Любая sup-стационарная точка (x',t') функции прибыли π_p определяется условиями:

a) субдифференциал функции

$$\pi_p(\cdot,t') : X \to R$$

в точке x' содержится в $-\Gamma^+(x')$;

b) нулевой n-мерный вектор (n-мерный $\mathbf{0}$) принадлежит сумме супердифференциала вогнутой функции

$$\pi_p(x',\cdot) : T \to R$$

в точке t' и конуса $\Gamma^+(t')$.

Субдифференциал функции $\pi_p(\cdot,t')$ не зависит от x' и состоит из единственного вектора

$$p - p \cdot B(t') = p \cdot [I - B(t')],$$

где I – единичная матрица. Условие a) означает, что

$$p \cdot [B(t') - I] \in \Gamma^+(x').$$

В частности, если x' – внутренняя точка множества X, то

$$\Gamma^+(x') = \{\mathbf{0}\}$$

и, следовательно, $p \in S_t$.

Супердифференциал функции $\pi_p(x', \cdot)$ в точке t' равен взятому с обратным знаком субдифференциалу функции

$$p \cdot B(t)x' + p \cdot A(t),$$

в той же точке, т.е. множеству

$$-\partial_t[p \cdot B(t')x'] - \partial_t[p \cdot A(t')].$$

Следовательно, условие $b)$ означает, что множества

$$-\partial_t[p \cdot B(t')x']$$

и

$$\partial_t[p \cdot A(t')] - \Gamma^+(t')$$

имеют непустое пересечение. Выбрав q из пересечения этих множеств, получим четверку (p, q, x', t'), которая является расширенным производственным равновесием в смысле определения 11.

Действительно, так как

$$p \cdot [B(t') - I] \in \Gamma^+(t'),$$

а

$$q \in \ -\partial_t p \cdot B(t')x',$$

то пара (x', t') – sup-стационарная точка функции

$$p \cdot x - p \cdot B(t)x - q \cdot t.$$

А так как при этом

$$q \in \partial_t[p \cdot A(t')] - \Gamma^+(t'),$$

то (t') – sup-стационарная точка функции

$$q \cdot t - p \cdot A(t).$$

Иными словами (p,q,x',t') – расширенное производственное равновесие.

Наоборот, если (p,q,x',t') – расширенное производственное равновесие, то из sup-стационарности (x',t') для функции

$$p\cdot x - p\cdot B(t)x - q\cdot t$$

следует условие a), так как

$$p[B(t')-I]\in\Gamma^+(x').$$

Кроме того,

$$q\in[-\partial_t p\cdot B(t')x'+\Gamma^+(t')],$$

а

$$-q\in[-Dt[p\cdot A(t')+\Gamma^+(t')]$$

в силу sup-стационарности точки (x',t') для функции $q\cdot t-p\cdot A(t)$. Из этих двух условий следует, что n-мерный $\mathbf{0}$ принадлежит множеству

$$-\partial_t p\cdot B(t')x'-\partial_t[p\cdot A(t')]+\Gamma^+(t'),$$

т.е. выполняется условие b). Следовательно, (x',t') – sup-стационарная точка функции суммарной прибыли. Ч.т.д.

Замечание. Множество всех таких $p\in S$, что (x',t) – sup-стационарная точка функции π_p, выпукло и замкнуто. Далее оно обозначается через $S(x',t')$, а его коническая оболочка, т.е. совокупность всех векторов вида $s\cdot p$, где $p\in S(x',t')$, а s – положительное число – через $P(x',t')$. Соответствующее каждому $p\in P(x',t')$ множество

$$Q_p(x',t')=[-\partial_t p\cdot B(t')x'+\Gamma^+(t')]\bigcap[\partial p\cdot A(t)-\Gamma^+(t')]$$

также замкнуто и выпукло. Более того, выпукло и замкнуто множество

$$SQ(x',t')=\{(p,q)|p\in S(x',t'),q\in Q_p(x',t'),$$

а множество

$$PQ(x',t')=\{(p,q)|p\in P(x',t'),q\in Q_p(x',t')$$

– выпуклый, замкнутый конус, т.е. вместе с каждой парой (p,q) множество $PQ(x',t')$ содержит все пары, получаемые из нее умножением на положительное число.

Полученное выше отображение

$$PQ : (x', t') \to PQ(x', t')$$

логично интерпретировать как MCP-правило[11, 13], определенное на множестве всех точек из $X \times T$, которые могут быть sup-стационарными точками функции π_p при каких-то ценах $p \in S$.

4.2. Эквивалентность подходов

Утверждение 2. *Если (x', t') – sup-стационарная точка функции прибыли, то минимум функции*

$$p \cdot B(t)x' - p \cdot A(t)$$

на T достигается в точке t'.

Доказательство. Следует из условия $b)$ описания sup-стационарной точки в доказательстве утверждения 1.

Утверждение 3. *Если точка $(x, t) \in X \times T$ не может быть представлена как sup-стационарная точка прибыли ни при одном $p \in S$, то найдется такая точка $(x', t') \in X \times T$, что справедливо неравенство*

$$x' - B(t')x' - A(t') > x - B(t)x - A(t).$$

Доказательство. При любом неотрицательном p множество

$$\{p \cdot [B(t) - I]\} \times \partial_t [p \cdot B(t)x + p \cdot A(t)]$$

в $l + n$-мерном арифметическом пространстве выпукло и замкнуто. Объединение таких множеств по всем неотрицательным $p \neq 0$ – выпуклый замкнутый конус, обозначаемый далее $G(x, t)$. Он не пересекается с конусом $\Gamma^+(x) \times \Gamma^+(t)$, так как иное означает существование цен, при которых (x,t) – sup-стационарная точка функции прибыли, что противоречит принятому предположению. Конус $G(x, t)$ заостренный, следовательно, его можно строго отделить от конуса

$$\Gamma^+(x) \times \Gamma^+(t)$$

гиперплоскостью, т.е. найдется такая пара $(x', t') \in X \times T$, что

$$g \cdot (x' - x, t' - t) > 0 \quad \forall g \in G(x, t).$$

Иными словами, при любом неотрицательном $p \neq 0$ производная функции прибыли π_p по направлению $(x' - x, t' - t)$ строго возрастает. Если при этом выбрать (x', t') достаточно близко к (x, t), то при всех $p \in S$ будет справедливо неравенство

$$p \cdot x' - p \cdot B(t')x' - p \cdot A(t') > p \cdot x - p \cdot B(t)x - p \cdot A(t).$$

Отсюда следует требуемое утверждение.

В совокупности утверждения 1 – 3 позволяют охарактеризовать правило ценообразования, применяемое в производственном секторе данной модели как MCP-правило. Отличия от стандартных MCP-правил [11, 13] включают два достаточно принципиальных момента. Во-первых, совокупность производственных возможностей описана с разделением затрат на достижение технологического уровня и непосредственно на производство продуктов. Соответственно, система цен производства здесь двухэтапна и состоит из пары (p, q), а не одного только p. Во-вторых, эксплуатируется другая концепция субдифференцирования, основанная на понятии квазидифференциала, а не субдифферонциала Кларка. Ее преимущество состоит в том, что по квазидифференциалу вычислимы все производные квазидифференцируемой функции по направлениям, а по субдифференциалу Кларка их вычислить нельзя.

В экономике эффект возрастающей отдачи всегда имеет объяснение. Оно может быть разным в различных случаях, но фундаментальная причина этого явления одна и та же – наличие затрат, которые не зависят от масштаба производства. Вычленение таких затрат из общей совокупности на практике не представляет серьезных трудностей. Более того, как правило, такие затраты учитываются отдельно, что существенно упрощает ситуацию по сравнению, например с [11, 13]. Именно этот случай здесь и рассмотрен. В сочетании с применением более совершенной техники субдифференцирования это позволило преодолеть на модельном уровне фундаментальное противоречие между принципом ценообразования на основе предельных издержек и окупаемостью производства.

5. Концепции равновесия потребителя

Центральное место в концепции равновесия потребителя занимает вопрос о происхождении цен, т.е. о порядке их назначения, так как от его решения зависит реалистичность и, в конечном счете, жизнеспособность модели. Ниже рассматриваются альтернативные подходы к назначению цен и соответствующие им концепции равновесия потребителя.

5.1. Полные затраты потребителя

Напомним, что для отдельного потребителя система цен – это условия, на которых он может получать различные блага, т.е. продукты или услуги [8, С.74]. В стандартных моделях конкурентного равновесия такие условия определяются единым для всех потребителей и производителей благ вектором цен $p \in I\!R^l_+$, причем в состоянии равновесия вектор цен с точностью до нормировки соответствует предельным издержкам производства и предельным полезностям благ для всех потребителей. Происхождение вектора цен реально не обсуждается. Считается, что уровень цен складывается в результате игры рыночных сил.

Аналогичное объяснение заведомо не годится для рассматриваемой модели с двухэтапном ценообразовании, так как в ней присутствует элемент ценовой дискриминации. Формальные условия получения благ потребителем i описываются парой векторов

$$(p, q_i) \in I\!R^l_+ \times I\!R^n_+,$$

один из которых определяет общие для всех потребителей цены на продукты или услуги, а второй – персональные для каждого $i \in M$ цены на что-то еще, что может быть, например, правом входа на рынок или лицензией на использование технологии. В том и другом случае нельзя считать, что персональные цены q_i складываются в результате игры случайных факторов. Гораздо реалистичнее предположить, что персональные цены за право входа на рынок назначает некий специальный орган или поставщик товаров. Точно так же можно предположить, что персональные цены лицензий на использование технологий назначает лицензиар. Но тогда без ответа остается вопрос: откуда лицо, назначающее цены, может заранее знать –

кому и какие цены можно предложить, чтобы ни в одном случае не спугнуть потенциального клиента и, в то же время, не занизить цену? Почти очевидно, что это невозможно.

Столь же очевидно, что персональные цены q_i могут сформироваться только в результате переговоров. Вопрос заключается в том, как организовать процесс переговоров? Строго говоря, ответ на него заведомо выходит за пределы модели. Тем не менее, его обсуждение не только не лишено смысла, но может быть весьма полезным. Поскольку процесс переговоров – это действия экономических агентов в ситуации отсутствия равновесия, его обсуждение помогает понять на содержательном уровне, что есть равновесие и как к нему можно приблизиться.

Здесь уместно вернуться к понятию цены как совокупности условий. Такое понимание хорошо согласуется с практикой ценообразования в сфере наукоемких услуг. Так, в последнее время получила распространение система ценообразования на услуги Сети, при которой пользователю предлагают выбрать систему оплаты из ограниченного, но достаточно широкого набора вариантов (тарифов). Каждый такой тариф – это двухэтапная система цен с абонентской платой в виде фиксированного платежа и отдельной оплатой услуг, предоставляемых сверх того минимума, который считается оплаченным в рамках абонентской платы. Такая система цен особенно наглядна, если объем предоставляемых услуг определяется количеством передаваемой и принимаемой информации (в байтах), т.е. оплачивается только «трафик». Как правило, чем выше абонентская плата, тем ниже ставка при оплате «трафика» сверх минимального объема. Например, одна из реально работающих фирм предлагала клиентам меню из 4 тарифов с абонентской платой: \$10; \$20; \$30; \$40 в месяц. Каждому тарифу соответствовал «бесплатный трафик» в заданном объеме и отдельная ставка оплаты сверх этого объема. Так, абонентской плате \$10 соответствовал «бесплатный трафик» в объеме 50 мегабайт и ставка оплаты \$0,20 за каждый мегабайт сверх этого объема. Абонентской плате \$20 соответствовали 100 бесплатных мегабайт и \$0,16 за мегабайт сверх этого объема, абонентской плате \$30 – 200 «бесплатных мегабайт» и ставка \$0,12 за мегабайт превышения. Наконец, абонентской плате \$40 соответствовали 300 «бесплатных мегабайт» и \$10 за каждый мегабайт превышения.

Если перевести эту систему оплаты на язык модели, то начальный платеж можно представить в виде $q_i \cdot t_i$, причем он соответствует не в точности абонентской плате, а абонентской плате за вычетом цены «бесплатных мегабайт». Иначе говоря, при абонентской плате \$10 из нее надо вычесть цену 50 «бесплатных мегабайт», которая при ставке \$0,2 за мегабайт составит \$10. В результате получим $q_i \cdot t_i = \$0$. Аналогичным образом из \$20 надо вычесть \$16, получается \$4. Из \$30 надо вычесть \$24 и получить \$6, а из \$40 вычесть \$30 и получить \$10.

Следует заметить, что если назначить всем клиентам единую плату \$10 за вход на рынок и единую ставку оплаты \$0,1 за мегабайт, то при потреблении 50, 100, 200 и 300 мегабайт получим, соответственно, \$15, \$20, \$30 и \$40, т.е. в проигрыше оказывается только потребитель минимального объема услуг. Если переход на новый «единый» тариф сделать добровольным, то на него с большой вероятностью перейдут большинство клиентов. Примерно это и произошло в том конкретном случае, о котором идет речь. Однако такой подход предполагает публичность предложения тарифов и отсутствие ценовой дискриминации. Следовательно, он не позволяет полностью оптимизировать систему цен, причем именно потому, что оптимизация предполагает дифференцированную плату за вход.

Чтобы выстроить систему цен с единой ставкой оплаты за мегабайт и дифференцированной платой за вход, фирме необходимо вести переговоры с каждым клиентом индивидуально. Это вполне реально, когда список клиентов известен и с каждым из них установлена постоянная связь. В рассматриваемой конкретной ситуации ценовая дискриминация может свестись к тому, что клиентам с минимальным объемом (до 50 мегабайт) будет предложено платить \$5 за вход и те же \$10 за мегабайт, что и остальным клиентам. Чтобы дифференцировать плату за вход для остальных клиентов, надо более точно измерять количество потребляемых ими мегабайт. Вместе с тем, начинать переговорный процесс с отдельным клиентом имеет смысл именно тогда, когда ставка оплаты за мегабайты для него отличается от минимальной ставки, основанной на цене предельных издержек. В противном случае фирме нечего будет предложить клиенту в обмен на повышение платы за вход. Однако следует учитывать, что при проведении индивидуальных переговоров неизбежно возрастут трансакционные издержки. В результате весь выигрыш от оптимизации системы цен может быть потерян.

Следующий вопрос интерпретации заключается в том, какой именно сомножитель в скалярном произведении $q_i \cdot t_i$ следует считать фиксированным q_i или t_i. В том и другом случае можно построить достаточно логичную схему.

Например, пусть заданы цены q_i. Тогда, выбирая размер начального платежа $q_i \cdot t_i$, клиент фактически выбирает t_i и, следовательно, $b(t_i)$. Тем самым он (клиент) определяет ставку оплаты за дополнительные мегабайты (в рассмотренном примере) или цену на производимый продукт, если пользоваться языком модели. Здесь уместно напомнить, что цены в модели выбираются с точностью до нормировки, т.е. при $\check{l} = \hat{l} = 1$ выбор цен сводится к выбору $b(t)$ и, следовательно, к выбору t. Примерно то же имеет место в рассмотренном примере. Ставка за дополнительные мегабайты жестко связана с абонентской платой, т.е. клиент, выбирая тариф, выбирает два связанных между собой показателя, а по двум этим показателям однозначно вычисляется плата за вход $q_i \cdot t_i$. Поэтому можно считать, что он выбирает t_i. Более того, в рассмотренном примере, как и в модели, оптимизация по x_i и по t_i осуществляется раздельно. Потребность клиента в мегабайтах учитывается им при выборе тарифа как достаточно хорошо известная величина, т.е. обычно у клиента есть некоторый план, на который он ориентируется при выборе тарифа. Фактическое потребление определяется в течение месяца, т.е. после того, как сделан выбор тарифа. При этом тоже происходит некоторая оптимизация потребления, но она осуществляется в рамках заданного тарифа по принципу: брать или не брать какую-то информацию из Сети. Аналогичным образом оптимизация происходит в модели. При выборе агентом t_i считается заданным x_i, а при выборе x_i считается заданным t_i. Таким образом, модель и пример достаточно хорошо согласуются между собой.

Если считать фиксированным t_i или единый для всех агентов t, то следует признать, что клиент, выбирая один из предложенных ему тарифов, выбирает пару p, q_i. Разумеется, как и в первом варианте предполагается наличие некоторого ориентировочного плана потребления x_i. Таким образом, при заданных x_i, t клиент выбирает один из возможных вариантов p, q_i и оптимизирует за счет этого сумму выплат. Это очень похоже на обратную функцию спроса, о чем пойдет речь ниже. Вместе с тем, следует заметить, что персональной здесь оказываются не только цена за вход, но и цена дополнительных байтов, т.е. можно было писать не p, а p_i. Если вести переговоры с каждым клиентом отдельно и в результате сблизить выбираемые ими цены p_i так, что будет выполнено условие ($\mathbf{v}'$), то можно будет говорить о достижении равновесия. Иными словами, такая интерпретация переговорного процесса также позволяет говорить об отсутствии явных противоречий между моделью и рассмотренным примером. Ниже буде показано, что подход на основе предпочтений, заданных явно, и на основе функций обратного спроса практически эквивалентны, т.е. с помощью относительно простой математической техники можно от одного подхода переходить к другому и обратно.

Наконец, последний вопрос интерпретации модели касается относительной силы сторон в процессе переговоров. Основная концепция равновесия в потреблении строится на предположении о выборе персональных цен для каждого потребителя в процессе диалога между ним и поставщиком производимых услуг или продуктов. Такое предположение вполне уместно, когда речь идет о допуске еще одного потребителя на рынок с уже установившимися ценами на продукты и услуги $p \in S_t$ при заданном t. Потребитель i не может влиять на выбор t, так как уже произведены затраты $A(t)$ на создание технологий, но по той же причине он может влиять на цены q_i, так как позиция поставщика продуктов или услуг в этих условиях не может быть слишком жесткой. Особенно очевидно это в том случае, если производство в основном сводится к созданию технологии или (в более общем варианте) к накоплению определенного ИК, который не расходуется при производстве продуктов или услуг или, иначе говоря, потребность в котором не зависит от масштаба производства.

Наоборот, позиция лицензиара может быть жесткой, если затраты на создание технологий не произведены, т.е. выбор значения t еще не сделан. Следовательно, предположение о назначении персональных цен лицензиаром достаточно хорошо сочетается с предположением о производстве продуктов для своих нужд каждым потребителем. В этом случае любой потребитель i воспринимает цены p, q_i как заданные. Он выбирает пару (x_i, t), исходя из своих предпочтений и финансовых возможностей, а также из заданных цен. На этих предположениях строится концепция сильного равновесия в потреблении и соответствующая ей концепция общего равновесия.

5.2. Обратные функции спроса

Зависимость между ценами благ и их потреблением в моделях равновесия обычно выражается с помощью функций спроса или отношений предпочтения, реже – с помощью функций обратного спроса [14], т.е. точечно-множественных отображений, сопоставляющих каждому $x_i \in X_i$ некоторое подмножество в S или в $\mathbb{R}^l_+$. Формально эти подходы взаимозаменяемы, но каждый из них имеет известные преимущества при описании определенных зависимостей между переменными. В модели с двухэтапным ценообразованием целесообразно использовать оба подхода, в том числе их сочетание. Например, зависимость персональных цен q_i от x_i и t, т.е. от «физических» переменных при заданных ценах на невоспроизводимые ресурсы можно выразить с помощью функции обратного спроса, а зависимость x_i от цен $p \in S_t$ при заданных t и бюджете – с помощью обычных функций спроса.

Из соображений технического характера удобно иметь полный набор функций спроса и обратного спроса, которые можно использовать в различных комбинациях, определяемых интерпретацией модели.

Зависимость цен на продукты и услуги от x_i может быть выражена с помощью точечно-множественного отображения

$$U_i^{\#} : X_i \to 2^S,$$

которое называется функцией обратного спроса. Такое отображение может быть построено по отображению U_i, описывающему предпочтения потребителя.

Утверждение 4. *Если отображение U_i удовлетворяет условию CU), то определяемое условием*

$$U_i^{\#}(x_i) = S \cap (cone[U_i(x_i) - x_i])^+ = \{g \in S | g \cdot (x_i' - x_i) \geq 0, \forall x_i' \in U_i(x_i)\}$$

отображение

$$U_i^{\#} : X_i \to 2^S$$

выпуклокомпактнозначно и непрерывно по Какутани.

Доказательство. Выпуклость и замкнутость множества $U_i^{\#}(x_i)$ следует из выпуклости и замкнутости сопряженного конуса, которая не зависит от свойств U_i. Так как S ограничено, отсюда же следует компактность $U_i^{\#}(x_i)$. Чтобы показать полунепрерывность сверху отображения $U_i^{\#}$, достаточно заметить, что

$$(cone[U_i(x_i) - x_i])^+ = (cone[clU_i(x_i) - x_i])^+, \forall x_i \in X_i,$$

а отображение clU_i полунепрерывно снизу в силу предположения CU). Отсюда следует полунепрерывность сверху отображения $U_i^{\#}$, в чем легко убедиться непосредственно с помощью стандартного приема с выбором сходящихся последовательностей.

Пусть заданы последовательности

$$\{x_i(\nu)\}_{\nu=1}^{\infty} \subset X_i; \quad \{g(\nu)\}_{\nu=1}^{\infty},$$

где

$$g(\nu) \in U_i^{\#}(x_i(\nu)) \quad \forall \nu.$$

Если первая последовательность сходится к x_i, а вторая – к некоторому $g \in S$, то

$$g \in U_i^{\#}(x_i).$$

Действительно, если это не так, то найдется

$$x_i' \in clU_i(x_i),$$

для которого

$$g \cdot (x_i' - x_i) < 0.$$

Но тогда

$$g(\nu) \cdot (x_i' - x_i) < 0$$

для достаточно больших ν. В силу полунепрерывности снизу отображения clU_i найдется сходящаяся к x_i' последовательность $\{x_i'(\nu)\}$, таких что

$$x_i'(\nu) \in clU_i(x_i(\nu)) \quad \forall \nu.$$

Тогда для достаточно больших ν должно выполняться неравенство

$$g(\nu) \cdot (x_i'(\nu) - x_i(\nu)) < 0,$$

что противоречит условию

$$g(\nu) \in U_i^{\#}(x_i(\nu)).$$

Из полученного противоречия следует замкнутость, т.е. полунепрерывность сверху отображения $U_i^{\#}$. Так как S – компакт, то из замкнутости $U_i^{\#}$ следует его непрерывность по Какутани. Ч.т.д.

Замечание. Если справедливо предположение $CH)$, то $U_i^{\#} = G_i$.

Утверждение 5. *Если задано отображение*

$$G_i : X_i \to 2^S,$$

такое что для каждого $x_i \in X_i$ множество $G_i(x_i)$ выпукло и замкнуто, причем отображение G_i полунепрерывно сверху, то определяемое условием

$$G_i^{\#}(x_i) = \{x_i' \in X_i | g \cdot (x_i' - x_i) > 0, \forall g \in G_i(x_i)\}$$

отображение

$$G_i^{\#} : X_i \to 2^{X_i},$$

обозначаемое далее V_i, удовлетворяет условию $CU)$.

Доказательство. Непосредственно из определения отображения V_i следуют включение $x_i \in clV_i(x_i)$ и выпуклость $G_i(x_i)$ для каждого $x_i \in X_i$. Открытость $V_i(x_i)$ следует из компактности $G_i(x_i)$. Действительно, для любого $x_i' \in V_i(x_i)$ значение функции $g \cdot x_i'$ достигает минимума на $G_i(x_i)$, причем этот минимум строго положителен. Следовательно, точка x_i' содержится в $V_i(x_i)$ вместе с некоторой своей окрестностью. Кроме того, $V_i(x_i)$ - конус с вершиной в точке x_i.

Остается проверить непрерывность отображения clV_i по Какутани, т.е. полунепрерывность этого отображения сверху (замкнутость) и снизу.

Пусть последовательность $\{x_i(\nu)\}_{\nu=1}^{\infty}$ точек из X_i сходится к x_i, а последовательность $\{x_i'(\nu)\}$, где $x_i'(\nu) \in clV_i(x_i)$ для каждого ν, сходится к некоторому $x_i' \in X_i$. Так как S - компакт, из полунепрерывности сверху отображения G_i следует его полунепрерывность снизу. Иными словами для любого $g \in G_i(x_i)$ существует сходящаяся к нему последовательность $\{g(\nu)\}_{\nu=1}^{\infty}$ точек $g(\nu) \in G_i(x_i(\nu))$. Тогда

$$g(\nu) \cdot (x_i'(\nu) - x_i(\nu)) \geq 0 \quad \forall \nu.$$

Аналогичное неравенство должно выполняться и в пределе, т.е.

$$g \cdot (x_i' - x_i) \geq 0.$$

Однако, g – произвольный элемент множества $G_i(x_i)$, следовательно, это неравенство выполняется для всех g, т.е. $x'_i \in V_i(x_i)$. Тем самым доказана полунепрерывность V_i сверху.

Пусть теперь $x''_i \in clV_i(x_i)$. Любая окрестность этой точки пересекается с $clV_i(x_i(\nu))$ при достаточно больших ν. Действительно, если это не так, то найдется такое число $\delta > 0$, что

$$g(\nu) \cdot (x_i - x''_i) > \delta$$

для некоторого $g(\nu) \in G_i(x_i(\nu))$ при каждом ν. Так как S – компакт, то без ограничения общности можно считать последовательность $\{g(\nu)\}_{\nu=1}^{\infty}$ сходящейся к некоторому $g \in S$, а из полунепрерывности сверху отображения G_i следует $g \in G_i(x_i)$. Но тогда одновременно должны выполняться неравенства

$$g \cdot (x''_i - x_i) \geq 0$$

и

$$g \cdot (x_i - x''_i) \geq \delta,$$

чего не может быть. Из полученного противоречия следует полунепрерывность снизу отображения G_i. Ч.т.д.

Замечание. Если отображение U_i удовлетворяет условию CU), а V_i определено соотношениями $G_i = U_i^{\#}$ и $V_i = G_i^{\#}$, то

$$V_i(x_i) = x_i + cone[U_i(x_i) - x_i], \forall x_i \in X_i.$$

Это следует непосредственно из определения отображений

$$G_i = U_i^{\#}; \quad V_i = G_i^{\#}.$$

Из утверждений 4 и 5 следует возможность перейти от отображения U_i, описывающего предпочтения, к отображению обратного спроса и обратно, т.е. устанавливается взаимозависимость между переменными p и x_i.

Зависимость цен на продукты и услуги от t определяется условием $p \in S_t$ (или $p \in coneS_t$, если не требовать нормировки цен). Наконец, зависимость между персональными ценами q_i и значениями p, t, x_i удобно изобразить в виде

$$q_i \in \phi_i(p, t, x_i),$$

где

$$\phi_i : S \times T \times X_i \to 2^{\mathbb{R}^n_+}$$

– точечно-множественное отображение, сопоставляющее каждой тройке

$$(p, t, x_i) \in S \times T \times X_i$$

множество $\phi_i(p, t, x_i)$, состоящее из всех приемлемых для потребителя i цен на лицензии. Далее всегда предполагается, что

$$\phi_i(p, t, x_i) = -\partial_t[p \cdot B(t)x_i] - \Gamma^+(x_i).$$

В таком случае $q_i \in \phi_i(p, t, x_i)$ равносильно условию

$$t \in Arg \min_{t' \in T}[p \cdot B(t')x_i + q_i \cdot t'].$$

Определение 12. *Квазиравновесием потребителя i при заданных $t^* \in T$ и $p^* \in S$ называется пара (x_i^*, q_i^*), удовлетворяющая условиям:*

$$a)\ \ p^* \in U_i^{\#}(x_i^*); \quad b)\ \ q_i^* \in \phi_i(p^*, t^*, x_i^*).$$

Аналогичным образом может быть определено понятие равновесия или квазиравновесия в терминах функций обратного спроса, когда заданными считаются x_i и t, а выбираются p и q_i. В конечном счете все эти определения приводят к одной и той же системе уравнений. Поэтому выбор одной из них в качестве основной – вопрос интерпретации. А решать его следует, опираясь на изучение практики ценообразования в наукоемком секторе экономики.

Литература

[1] Козырев А.Н. Оценка интеллектуальной собственности. – М., «Экспертное бюро-М», 1997.

[2] Edvinson L., Malone M.S., Intellectual Capital: Realizing Your Company's True Value by Finding Its Hidden Brainpower. – N.Y.: Happer Business, 1997. – 240 p.

[3] Нордстрем К.А., Риддерстрале Й. Бизнес в стиле Фанк. Капитал пляшет под дудку таланта. – СПб.: Стокгольмская Школа Экономики в Санкт Петербурге, 2000. – 272 с.

[4] Минс Г., Шнайдер Д. Метакапитализм и революция в электронном бизнесе: какими будут компании и рынки в XXI веке / Пер. с англ. – М.: Альпина Паблишер, 2001. – 280 с.

[5] Стюарт Т. Богатство от ума: Деловой бестселлер. / Пер. с англ. В.А. Ноздриной. – Мн.: Парадокс, 1998. – 352 с.

[6] Griliches Z. Patent Statistics as Economic Indicators: A Survey // Journal of Economic Literature. Vol. XXYIII. December 1990, pp.1661-1707.

[7] Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. – М.:Мир, 1991. – 464 с.

[8] Р.Коуз, «Фирма, рынок и право». – М.: Дело, 1993. – 192 с.

[9] Капелюшников Р.И., Экономическая теория прав собственности (методология, основные понятия, круг проблем), Препринт ИМЭМО. – Москва, 1990. – 90 с.

[10] Макаров В.Л. Экономическое равновесие: существование и экстремальное свойство//ИТН Современные проблемы математики, т. 19, 1982, с. 52-54.

[11] B.Cornet, General equilibrium theory and increasing returns: Prethentation //Journal of Mathematical Economics, vol.17, Nom 2/3, 1988, pp.103-118.

[12] Демьянов В.Ф., Васильев Недифференцируемая оптимизация. – М.: Наука, 1981. – 430с.

[13] Dehez P., Dreze J. Competitiv equilibria in economies with quantity-taking producers and increasing return tu scale, //Journal of Mathematical Economics, vol. 17, Nom 2/3 1988, pp.209-230.

[14] Равновесные решения задач многоцелевой оптимизации. – Препринт № 76 ИМ СОАН СССР, 1984. – 16 с.

[15] Дебре Дж. Четыре аспекта математической теории экономического равновесия//УМН, 1975, т. 32, N 1, с. 133-144.

[16] Экланд И. Элементы математической экономики. – М.: Мир, 1983. – 230 с.

[17] Dirker P. Topological Methods in Walrasian Economics. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1974.

[18] Balasko Y. Badget Constrain Pareto-Efficient Allocations. – J.Economic Theory, 1979, v.21, Nom 3, p.359-379.

[19] Debreu G. Economics with a finite set of equilibrium. – Econometrica, 1970, v. 38, p. 387-392.

[20] Козырев А.Н. Стратификации и трансверсальность в математической теории экономического равновесия. Препринт # WP/2001/127. – М.: ЦЭМИ РАН, 2001. – 50с.